UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LA BANDA DE MÖBIUS: PROPIEDADES Y ASPECTOS METODOLOGICOS UTILIZANDO MATERIAL DIDÁCTICO Y SOFTWARE.

ERIKA JULIANA SANCHEZ ORREGO

PEREIRA, SEPTIEMBRE DE 2018

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TÍTULO

LA BANDA DE MÖBIUS: PROPIEDADES Y ASPECTOS METODOLOGICOS UTILIZANDO MATERIAL DIDÁCTICO Y SOFTWARE.

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO:
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ERIKA JULIANA SANCHEZ ORREGO

DIRECTOR DE TRABAJO:
PEDRO PABLO CÁRDENAS ALZATE

PEREIRA, SEPTIEMBRE DE 2018

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL DIRECTOR

PEREIRA, SEPTIEMBRE DE 2018

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Al hablar acerca de una ciencia exacta como lo son las matemáticas que se sumergen en una realidad a partir de procesos abstractos, que en nuestra cotidianidad genera apatía y poca aceptación ante personas ajenas a esta disciplina, surge entonces la gran necesidad de plantear nuevos estudios acerca de cómo enseñar diversos aspectos de esta disciplina, de tal forma que sea ameno para cualquier persona. Por esta razón nuestro objetivo principal en este trabajo es evidenciar que pueden existir diversas metodologías que ayudan a explicar y comprender una estructura matemática, sin dejar a un lado el rigor que caracteriza esta ciencia, en realidad estas nuevas metodologías ayuda al desarrollo de diversos comportamientos matemáticos. Así pues, queremos dar a entender que existe la necesidad de crear ambientes de enseñanza de las matemáticas, a partir de aspectos lúdicos que garanticen el acercamiento de esta a cualquier tipo de persona. De tal manera que tomaremos este trabajo con el fin de buscar una oportunidad de idear estrategias de enseñanza en alguna estructura matemática.

Para cumplir este fin, en nuestro estudio analizaremos un cuerpo geométrico llamado La Cinta de Mobius, siendo este nuestro objeto central de estudio, donde verificaremos sus propiedades y algunas de sus aplicaciones. Así pues en nuestro trabajo realizaremos apreciaciones sobre los comportamientos que dicho objeto encierra desde un punto de vista didáctico, en el que se involucren todos los conceptos matemáticos que esta estructura sugiere, aunque se debe aclarar, que estos serán trabajados de una manera no tan rigurosa, siendo este el punto de partida para pensar en que este trabajo se haga atractivo para todo público.

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL:

- Verificar por medio de materiales didácticos y software, las propiedades y comportamientos inmersos en la estructura de la Cinta de Mobius

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Comprobar por medio de cortes sobre la superficie de la Banda de Mobius, si los objetos que se obtienen conservan idénticas características.
- Utilizar software matemático existente en la red para visualizar algunas propiedades y aplicaciones de la Cinta de Mobius.
- Verificar si el objeto conocido como Cinta de Mobius tiene inmerso en su estructura algunas nociones básicas de la topología.
- Determinar si es posible asociar algún patrón de recurrencia para el diseño o construcción de una Banda de Mobius.
- Exponer algunas aplicaciones de la Cinta de Mobius producto de sus comportamientos y propiedades.

Capítulo 3

MARCO CONCEPTUAL

El término topología se utiliza para identificar un área de las matemáticas que estudia la continuidad y otros conceptos originados a partir de ella. Se trata de una especialización vinculada a las propiedades y características que poseen los cuerpos geométricos y que se mantienen sin alteraciones gracias a cambios continuos, con independencia de su tamaño o apariencia.

Cabe resaltar que las funciones continuas de las matemáticas son aquellas que en los puntos cercanos del dominio, experimentan pequeñas variaciones en los valores. A nivel gráfico, estas funciones suelen estar en condiciones de dibujarse sin necesidad de levantar el lápiz del papel (idea que tendremos muy presente durante el desarrollo de este estudio).

Otro concepto central de la topología es el espacio topológico, una estructura matemática que permite definir de manera formal a la continuidad, conectividad y convergencia, entre otros conceptos.

Así pues, la topología, por lo tanto, es la especialización que hace foco en el estudio de las funciones continuas y los espacios topológicos. Esta disciplina trabaja con los objetos de distintas formas, siempre que no se interrumpa la mencionada continuidad. En palabras del lenguaje cotidiano, podría decirse que la topología tiene permitido doblar, estirar, retorcer o encoger los elementos, pero sin quebrarlos ni segmentar aquello que esté unido, ni pegando lo que esté separado. Así podríamos decir que, a nivel topológico, un triángulo es lo mismo que una circunferencia: Uno puede ser transformado en el otro de manera continua, sin necesidad de cortar o pegar. En cambio, una circunferencia nunca puede ser transformada en un segmento desde el punto de vista topológico, ya que dicha transformación requeriría romper la superficie de la misma, perdiéndose la mencionada continuidad en la transformación realizada. Pensando en esta idea intuitiva de lo que es la topología, debemos aclarar algunas nociones de la disciplina que tendremos muy presente durante el desarrollo de este trabajo. Por tal razón diremos que un homeomorfismo es una función definida de un espacio topológico a otro, que cumple con ser una función uno a uno continua y cuya inversa también lo es. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos. Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismos se denominan propiedades topológicas.

De modo intuitivo, el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son los mismos vistos de otra manera: permitiendo estirar, doblar o cortar y pegar. Sin embargo, los criterios intuitivos de estirar, doblar, cortar y pegar requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Esta última apreciación será sometida a consideración durante el desarrollo de este estudio, dando a entender, que una de las principales nociones de la topología que servirán de apoyo para el desarrollo de este escrito, serán la de continuidad y homeomorfismos, claro está, desde un punto de vista topológico que se apoya en las deformaciones o alteraciones que se realicen sobre la superficie de nuestro objeto geométrico de estudio.

También cabe aclarar que una última noción de la topología que será tenida en cuenta a la hora de buscar aplicaciones generadas a partir de nuestro objeto de estudio, es aquella que recibe el nombre de encamamiento, refiriéndose esta como la necesidad que existe de generar un nueva dimensión sobre alguna estructura geométrica que se somete a deformaciones (asociándola a la teoría de dimensiones), siendo esta noción de gran importancia, puesto que con ella haremos evidente que en efecto nuestro cuerpo de estudio refiere aplicaciones que derivan en estudios posteriores, como lo es por ejemplo, la estructura conocida como Botella de Klein.

Además de estas nociones de la topología que nos permitirán comprender y asimilar el comportamiento y la estructura del cuerpo que estudiamos, existe un concepto que escapa de esta disciplina que servirá para mostrar una nueva aplicación para el objeto que analizamos. Este concepto se refiere a una noción de la teoría de la relatividad que se conoce con el nombre de la teoría de los marcos inerciales. Para dar una pequeña idea del constructo teórico de la misma, simplemente diremos que cuando se habla de marcos inerciales, hacemos referencia a como una misma situación puede ser vista de dos maneras diferentes, tal como ocurre con el lanzamiento hacia el suelo de una moneda desde un autobús en movimiento (comparando lo que observa la persona que lanza verticalmente hacia el suelo la moneda, con lo que observa una persona que se encuentra por fuera del automóvil y en reposo).

Teniendo en cuenta los conceptos definidos anteriormente, hablaremos de un extraordinario cuerpo geométrico que presenta las propiedades topológicas descritas (continuidad, homeomorfismos y encamamiento, incluyendo aquellas que escapan de esta disciplina como la teoría de marcos inerciales), este objeto recibe el nombre de Banda o Cinta de Mobius y lo conoceremos a continuación.

Capítulo 4

REFERENTES TEÓRICOS

4.1. Algunas investigaciones en este campo.

La serie de documentos, artículos e investigaciones que se relacionaran a continuación, son aquellas que a nuestro juicio involucran aspectos en común con el trabajo desarrollado, comprendiendo de esta manera que en dichos escritos, se halla información de gran interés, que está estrictamente relacionada con los conceptos y metodologías que se plantean es este trabajo.

- En la Universidad Tecnológica de Pereira, se encuentra una investigación realizada en el año 2013 por los licenciados Andrés Trujillo Arias y Diana María Osorio Cardona, cuyo nombre titula "Experiencia Topológica en grados cuarto, quinto y sexto, de la educación básica". Dicha investigación trata sobre la aplicación de diversas actividades escolares que involucran nociones topológicas, como exterior, interior, frontera, continuidad, entre otras, y algunas estructuras matemáticas como lo son la Cinta de Mobius y la Botella de Klein.

- Existe un artículo publicado en la revista web "*SUMA*", escrito por Ana Belén Granados Pérez, Ana Grau de la Herrán y Juan Núñez Valdés de la Universidad de Sevilla, cuyo nombre titula: "*La Banda de Mobius: un camino que te llevará de cabeza"*. Dicho artículo trata sobre la historia, construcción, algunas propiedades (cortes en la cinta) y aplicaciones de la Banda de Mobius, los cuales son trabajados mediante material didáctico y software.

- Existe un artículo publicado en el Blog La Izquierda Socialista, cuyo nombre titula: "Apuntes *sobre La " Cinta de Mobius"* y la "*Botella de Klein" su naturaleza dialéctica".* Dicho artículo trata sobre los fundamentos matemáticos y topológicos que se encuentran inmersos en la Cinta de Mobius y la Botella de Klein.

Capítulo 5

METODOLOGÍA DEL PROYECTO

Este estudio que realizamos acerca del comportamiento y propiedades de la Cinta de Mobius, forma parte de un macro proyecto en objetos con propiedades topológicas que se lidera en la Universidad Tecnológica de Pereira con el grupo de investigación GEDNOL, que cuenta bajo la supervisión y acompañamiento del Dr. Pedro Pablo Cárdenas Álzate. Por tal motivo en algunos momentos de nuestro estudio recurriremos a situaciones descritas para otros objetos que actualmente son foco de investigación de nuestro grupo de trabajo. Uno de estos objetos es conocido con el nombre de Botella de Klein, y es un componente esencial para la verificación de las propiedades y el comportamiento de nuestro cuerpo geométrico de estudio, con lo cual damos a entender que reiteradamente acudiremos a las características propias de este objeto para recrear diversas maneras de hacer evidentes las características propias de la Cinta de Mobius.
Para llevar a cabo los objetivos trazados de este trabajo, acudiremos a la implementación de materiales manipulables tales como cartulina, plastilina, acetato, e inclusive implementaremos entre otros el uso de software que permita verificar visualmente comportamientos y características de la banda. También cabe resaltar que para nosotros es todo un reto trabajar este objeto que cuenta con una gran variedad de propiedades que se desprenden a partir de nociones matemáticas de la topología, ya que la idea radica en que al momento de hacer la lectura de este trabajo, este sea apto para todo público, es decir, nuestra labor consiste en generar un espacio en el que cualquier persona que se interese en conocer la Banda de Mobius, pueda hacerlo a través de este escrito sin necesidad de omitir conceptos como los de homeomorfismos, continuidad, entre otros más que forman el constructo teórico de nuestro cuerpo geométrico de estudio. Por tal motivo nuestro trabajo tendrá información matemática que será recreada para que personas con o sin formación en el estudio de las matemáticas, adquieran una idea de lo que es en realidad este objeto.

Nuestra metodología de trabajo no está vinculada al diseño de actividades que involucren acciones directas del lector para la adquisición de un concepto, propiedad o comportamiento de la banda, tampoco se regirá por la realización de encuestas o metodologías similares a trabajos de gabinete, redacción, revisión, sistematización, análisis de contenidos, por el contrario, nuestra metodología consiste en desglosar totalmente las características y comportamientos de la banda, dando a entender que bajo ninguna circunstancia pediremos a las personas que realicen manipulaciones o actividades para que por cuenta propia hagan evidente alguna propiedad.
La descripción anterior sugiere que en este espacio el lector comprenderá los comportamientos, características y propiedades de la Banda de Mobius sin necesidad de interactuar directamente

con ella. Para esto en el trabajo se describirá porque se dice que la Banda de Mobius es una superficie que posee una sola cara y un solo borde, porque tiene la propiedad de ser un objeto no orientable, porque se encuentra inmersa en un espacio de tres dimensiones, para finalmente relacionar algunas aplicaciones que a nuestro juicio este cuerpo encierra y así generar conclusiones acerca de la banda.

Por último, se debe resaltar que cuando mencionamos en nuestra metodología el uso de software, haremos uso de material existente en internet, siendo nuestro toque de originalidad el encargado de hacer distinción entre algo que ya existe (proyecciones) y la manera en que lo usemos para dar explicación acerca de algún concepto, propiedad o comportamiento relacionado con la banda.

Capítulo 6

MARCO TEÓRICO

6.1. Cinta De Mobius

Esta banda como también es conocida, puede construirse tomando una tira de papel rectangular, en la que se unen sus extremos, luego de realizar un giro de 180° a uno de ellos. Su superficie posee una sola cara, posee un único borde, tiene la propiedad de ser un objeto no orientable reglado[1], en el cual se pueden realizar cortes a través de su superficie, obteniendo diferentes y curiosos resultados. Esta a su vez, fue descubierta inicialmente por el matemático August Ferdinand Mobius y posteriormente complementada, por el matemático Johann Benedict Listing, en el año 1858.

Así pues, podríamos listar las propiedades básicas de este cuerpo de la siguiente manera:

- Es un cuerpo que posee una sola cara.
- Su superficie presenta un único borde.
- Es una superficie no orientable.
- Si se corta una Banda de Mobius a lo largo, se obtienen resultados diferentes, según dónde se efectúe el corte.

Una forma de representar la banda de Mobius (cerrada y con frontera), como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, sería mediante la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x\,(u,v) = \left[1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right]\cos(u) \\ y\,(u,v) = \left[1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right]\sin(u) \\ z(u,v) = \frac{v}{2} sin\frac{u}{2} \\ 0 \le u < 2\pi \;\; y \;\; -0.5 \le v \le 0.5 \end{cases}$$

Esta parametrización, representa una Banda doble de Mobius de ancho unitario, cuya circunferencia exterior tiene radio unitario y se encuentra en el plano coordenado *x*-*y* centrada en

[1] Una superficie reglada, en geometría, es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias, denominadas directrices.

(0, 0, 0). El parámetro u recorre la banda longitudinalmente, mientras que v se desplaza de un punto a otro del borde, cruzando transversalmente la circunferencia central.

Si analizamos detalladamente la descripción anterior para hacer evidente la banda, encontraremos que difícilmente este escrito sea apto para todo tipo de público (incluyendo aquellas personas ajenas a nuestra disciplina), por tal razón, bajo ninguna circunstancia tomaremos esta ruta de trabajo para nuestro escrito, lo cual hace necesario, utilizar una definición alternativa que de un significado más cotidiano acerca de la cinta. Así pues, diremos que topológicamente, la Banda de Mobius puede definirse como el cuadrado[2] [0,1] X [0,1] , que tiene sus aristas superior e inferior identificadas (topología cociente[3]) por la relación $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ para $0 \leq x \leq 1$.

Como vemos, en la definición anterior se menciona un cuadrado como aquel que topológicamente genera nuestro objeto de estudio, dando a entender, que de alguna manera podríamos asociar esta definición, con la forma cotidiana de construir dicha banda. Pues bien, este será nuestro punto de partida para iniciar con el estudio de este maravilloso cuerpo geométrico y para lograr tal fin, comenzaremos observando detalladamente la siguiente figura.

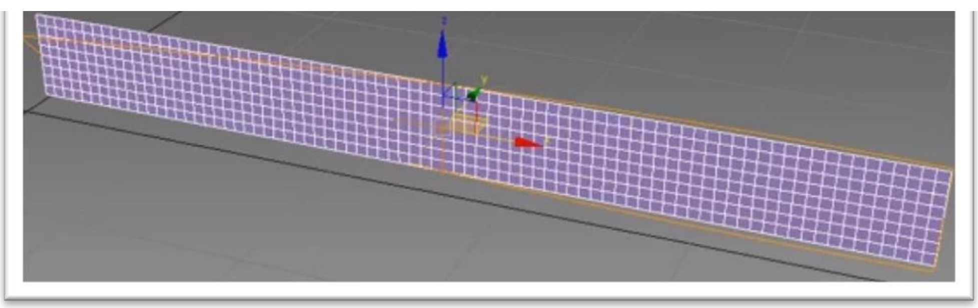

Figura 1. Polígono fundamental de la Cinta de Mobius

Observamos claramente la proyección por medio de software de una superficie cuadrada. Esta recibe el nombre de polígono fundamental de la Cinta de Mobius y es aquel que genera dicho objeto. Como dijimos en nuestra introducción, la idea de utilizar software para estudiar las propiedades y el comportamiento de la banda, consiste en apoyarnos de material ya existente (proyecciones de software), aunque claro está, nuestra labor radica en darle nuestro toque de originalidad. Por tal razón, iniciamos nuestro estudio proyectando las imágenes del software que

[2] Para transformar un rectángulo en una banda de Mobius, se unen las aristas denominadas A de una manera tal que las flechas apunten en el mismo sentido.

[3] En matemáticas, la topología cociente consiste intuitivamente en crear una topología pegando ciertos puntos sobre otros, en un espacio dado, por medio de una relación de equivalencia bien definida. El nuevo espacio así generado recibe el nombre de espacio cociente. Ejemplos conocidos son el toro matemático o la banda de Mobius.

se utiliza en el video[4] de YouTube titulado "*Cinta de Moebius*", con la finalidad de hacer evidente la deformación que se hace necesaria para la construcción de una banda de Mobius.

Esta primera proyección de software extraída del video "*Cinta de Moebius*", permite visualizar el cuadrado que representa nuestro objeto de estudio, siendo este aquel sobre el cual realizaremos diversas deformaciones con el fin de adquirir la forma de la banda. Así pues, la primera deformación que se hace necesaria sobre dicha superficie para generar la cinta, se muestra a continuación.

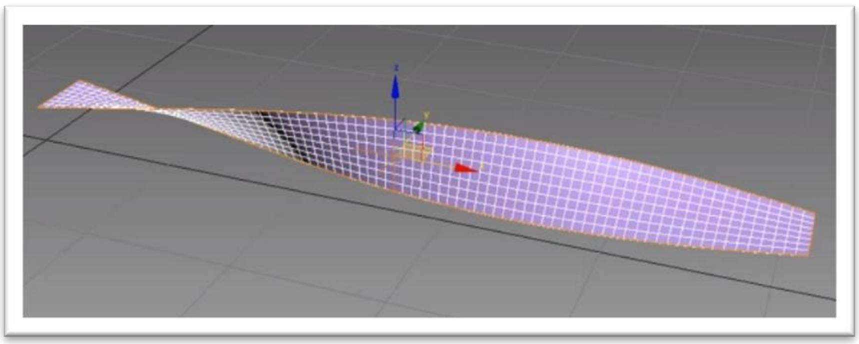

Figura 2. Deformación sobre el polígono fundamental d la banda**.**

Vemos claramente como sobre la superficie cuadrada se aplica un giro de 180°. Esta es la deformación que se hace necesaria para generar la banda. Ahora bien, a continuación, haremos evidente una última alteración sobre este cuerpo, entendida con la unión de sus extremos.

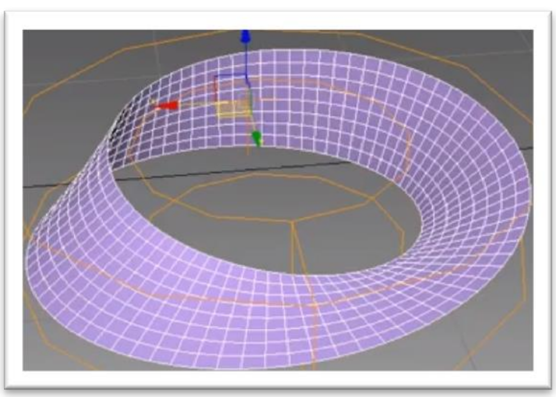

Figura 3. Resultado final: Banda de Mobius.

Vemos con claridad que, al aplicar deformaciones sobre la estructura polinomial, obtenemos como resultado la proyección de la silueta de la Banda de Mobius, siendo esta precisamente,

[4] Video "*Cinta de Moebius"*, extraído de YouTube, publicado en el 2015 y con dirección Web https://www.youtube.com/watch?v=bJr9TpU3i0Y

aquella superficie que es de todo nuestro interés, por tal motivo de ahora en adelante, estudiaremos las propiedades de este objeto a partir de actividades didácticas (utilizando diversos materiales), que permitan entender la estructura, comportamientos y aplicaciones que la propia cinta encierra. Para lograr tal fin realizaremos la construcción manual de la banda, siendo los pasos a seguir, los que se describen a partir de la siguiente figura[5].

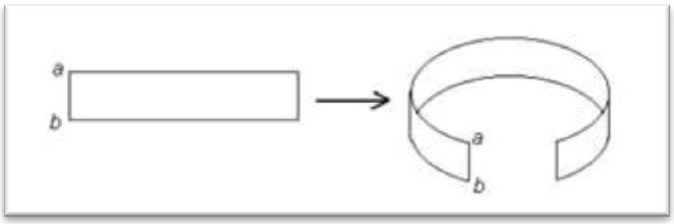

Figura 4. Construcción de una Banda de Mobius

Como observamos, si unimos los puntos *a* y *b* con el otro extremo de la tira, construiríamos una forma cilíndrica en la cual no se distinguen sus caras inferior y superior (como si se tratara de un barril sin tapas). Para construir una Cinta de Mobius, debemos realizar medio giro en el extremo identificado por los puntos *a* y *b*, para luego unirlo con el extremo faltante tal como se muestra a continuación.

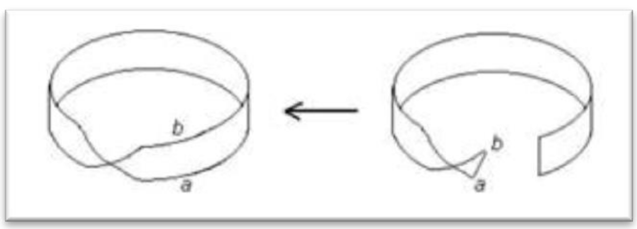

Figura 5. Medio giro sobre un extremo de la tira de papel

Esta es la manera de obtener el cuerpo geométrico que recibe el nombre de Banda de Mobius, del cual mencionamos anteriormente, posee diversas características que serán sometidas a estudio a continuación.

Para verificar cada una de las propiedades y entender el comportamiento de la banda, realizaremos comparaciones con otros cuerpos geométricos, además de cortes y recorridos a través de su superficie para los cuales implementaremos el uso de materiales didácticos. Por tal motivo, lo primero que haremos será hacer evidente el resultado que se obtiene luego de terminar el proceso descrito en los párrafos anteriores, para posteriormente someter el nuevo cuerpo a los mencionados procesos. El resultado obtenido se puede observar en la siguiente figura.

[5] Figuras 4 y 5 extraída de la página web, con dirección http://www.cientificosduranguenses.org/blogweb/index.php?/archives/27-El-logotipo-de-Cientificos-Duranguenses-y-la-Topologia.html

Figura 6. Cinta de Mobius

6.2. Propiedades de la cinta de Mobius

En la figura 6 vimos con claridad el cuerpo geométrico conocido como Banda de Mobius. Una de las propiedades que describe este objeto es la de poseer una única cara. Ahora bien, como nuestra idea de trabajo es hacer evidente cada propiedad que esta posee, recrearemos una forma de hacer visible dicha descripción. Para esto realizaremos un paralelo entre una superficie que adquiere forma cilíndrica y nuestro objeto de estudio, siendo la estructura cilíndrica, aquella que se desprende de los pasos que se hacen necesarios para elaborar la cinta. Si retomamos la idea que se expone en la figura 4 podemos encontrar una manera de diseñar el mencionado objeto. Observemos la siguiente figura.

Figura 7. Generando un cuerpo de forma cilíndrica.

Esta superficie nos permitirá comprender a que se hace referencia con las caras (una interna y otra externa). Para esto lo primero que haremos será recubrir con una cinta de color anaranjado una de las aparentes caras que posee el objeto. Observemos el proceso.

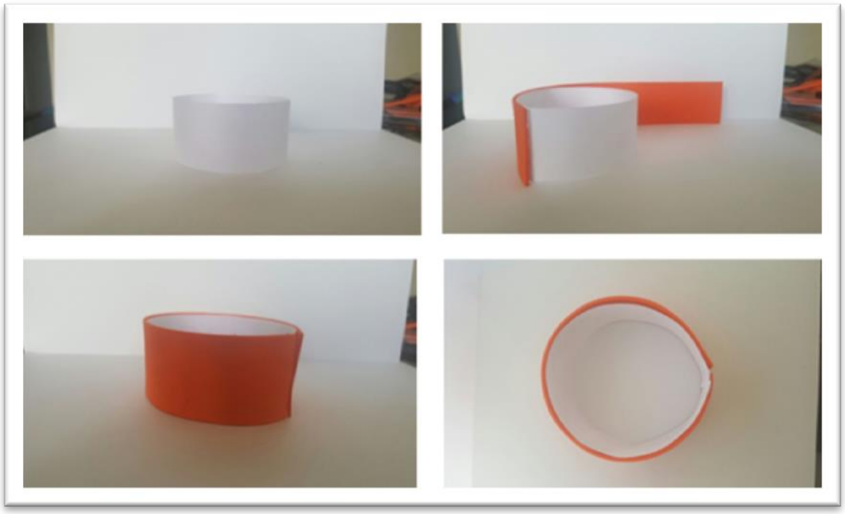

Figura 8. Recubriendo la superficie de la estructura cilíndrica

Claramente observamos en la secuencia que, al terminar de delinear la superficie del objeto, claro está, sin tocar, atravesar o cortar los bordes que esta posee, se observan dos tonalidades diferentes; una en color blanco y otra en color anaranjado (de la figura debemos resaltar que los bordes que mencionamos serán estudiados en detalle más adelante). Estas distinciones permiten afirmar que al intentar recubrir la totalidad de la superficie que conforma este cuerpo, se generan dos caras en el mismo, una de ellas podría asociarse al exterior y la otra al interior. Pues bien, para aclarar un poco más la intención de este proceso, debemos hacernos la siguiente pregunta, ¿es posible recorrer la totalidad de la superficie de un objeto sin que en él se haga evidente la distinción entre caras?

Para dar respuesta a esta pregunta debemos acudir a nuestro objeto de estudio. Para esto realizaremos sobre el un proceso análogo al anterior, en el cual vincularemos nuevamente la restricción sobre los bordes (no se pueden atravesar). Observemos la siguiente figura.

Figura 9. Recubriendo la superficie de la Banda de Mobius

Claramente observamos cómo se logra recubrir la totalidad de la superficie de la banda sin necesidad de tocar sección alguna de los aparentes bordes que esta posee. En esta ocasión se observa una sola tonalidad sobre la superficie de la cinta, permitiendo asegurar que en efecto la misma posee una única cara.

De esta situación podemos afirmar que ambos objetos a pesar de ser diseñados con una misma estructura (tira en forma rectangular), poseen diferencias significativas, pues uno de ellos distinguiría dos caras, mientras el otro distinguiría una sola cara. Cabe aclarar que en la figura se hace difícil encontrar los bordes en color blanco que posee la banda (luego de hacer el recubrimiento), por lo tanto, para dar mayor claridad acerca de esta afirmación (posee una única cara), estos serán trabajados en detalle más adelante.

De momento hemos hecho evidente porque se dice que la banda es una variedad que posee una sola cara. A continuación, iniciaremos con el estudio de una nueva propiedad de la misma, en la cual se hace alusión a esta como un objeto que no distingue de orientabilidad.

Para verificar esta propiedad de la banda, lo primero que haremos será diseñar una tira rectangular en la que se distingan cuatro regiones sobre su superficie, las cuales posteriormente, serán coloreadas con dos tonalidades diferentes. Este proceso se observa a continuación.

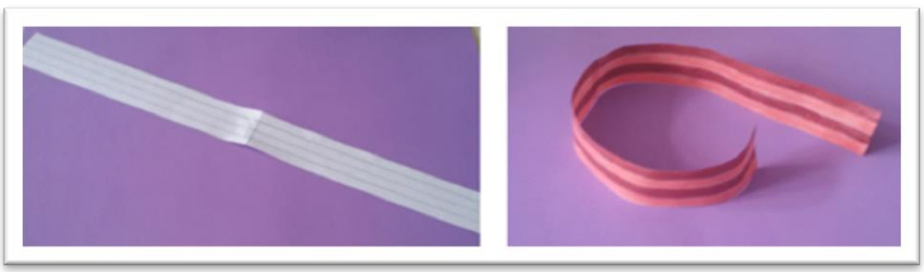

Figura 10. Subdivisiones de la superficie de una tira rectangular

Luego de someter la superficie de este objeto a una división de franjas, daremos forma cilíndrica al mismo, lo cual da a entender, que nuevamente realizaremos un paralelo que permita comprender la falta de orientabilidad en la banda. El proceso se muestra a continuación.

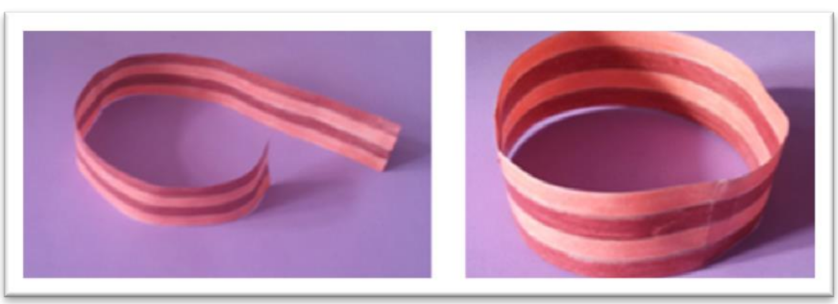

Figura 11. Forma cilíndrica con divisiones sobre su superficie

Claramente observamos que, al unir los dos extremos de la figura, las regiones coloreadas se adhieren a la perfección con la tonalidad que se le asignó inicialmente, es decir, todas las franjas de color rosado corresponden con las franjas de este mismo color, y para las franjas de color café, se tiene el mismo resultado. Esta descripción permite entender que este objeto distingue orientabilidad sobre su superficie. Ahora bien, el proceso a realizar con la banda es similar, aunque esperamos ocurra un resultado diferente.

Para estudiar la no orientabilidad de la cinta, lo primero que haremos será utilizar una tira rectangular que se divida en cuatro regiones como se hizo anteriormente. Posteriormente, se coloreará cada una de estas regiones con dos tonalidades diferentes, para finalmente, unir sus extremos indicando el giro de 180° sobre uno de ellos. El proceso se muestra a continuación.

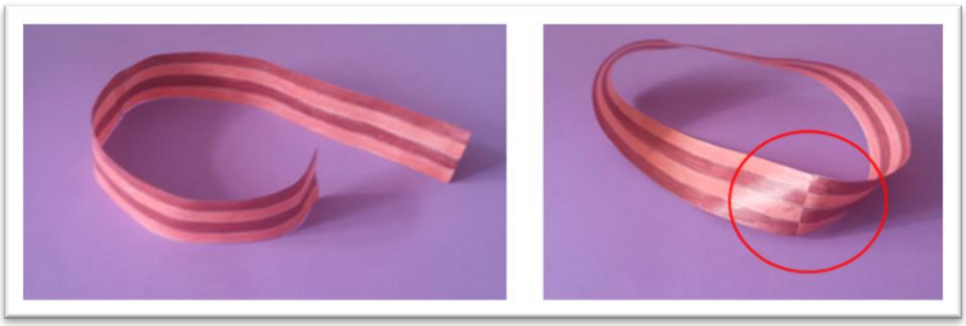

Figura 12. Cinta de Mobius que presenta divisiones sobre su superficie

Se observa de la figura que al unir los dos extremos realizando el giro de 180°, las franjas que dividían en cuatro regiones la superficie de la tira rectangular se enlazan con una tonalidad que no corresponde al tono de cada una (ver sección resaltada en la figura 12). Esta situación la podemos asociar con la falta de orientabilidad para la Banda de Mobius.

De las dos descripciones anteriores (forma cilíndrica-banda), podemos asegurar que existe una gran diferencia entre ambos cuerpos, siendo la misma merecedora de un estudio más detallado. Por tal razón, a continuación, desarrollaremos otra manera de hacer evidente que dicho objeto se comporta como uno no orientable, con la firme intención de aclarar un poco más esta particular característica.

Para desarrollar otra manera de ver la cinta como un objeto no orientable, lo primero que haremos será observar el recorrido que se realiza sobre la superficie de la banda, siendo este realizado, con un objeto que se desplaza en la cercanía de los aparentes bordes de esta. Para dar mayor claridad acerca de esta descripción, observaremos la secuencia de figuras extraídas del video[6] de YouTube titulado "*Noun-orientable surface*".

[6]Video "Non-orientable surface", extraído de YouTube, publicado en el 2017 y con dirección Web https://www.youtube.com/watch?v=gibTQyDmQPQ .

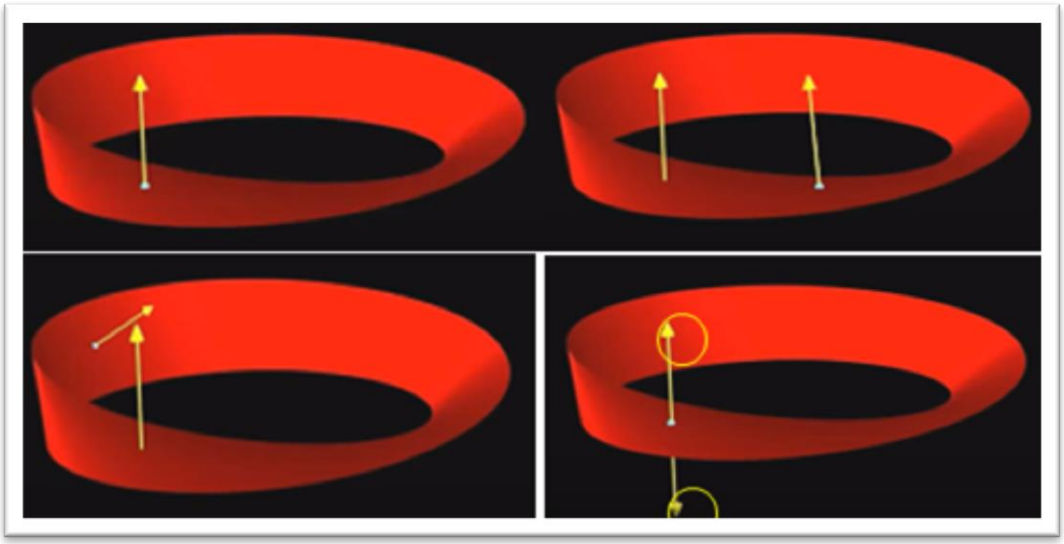

Figura 13. Recorriendo la superficie de la Banda de Mobius

Vemos claramente en la primera figura de la secuencia que con esta se da inicio al recorrido. Además, podemos ver con claridad como al desplazarse este objeto sobre la cinta, este apunta en todo momento en una dirección específica (hacia afuera). Ahora bien, al llegar a la última figura de la secuencia observamos como el objeto apunta en dirección contraria a la de su posición inicial, es decir, se hace evidente que en la contracara del punto desde el cual se dio inicio al recorrido, la dirección en la que apunta el objeto cambia de sentido (aun cuando este apunta nuevamente hacia afuera), lo cual da a entender que nuevamente para los trayectos que realicemos sobre esta superficie, bajo ninguna circunstancia se distinguiría orientabilidad.

Pues bien, esta es la manera en que queremos mostrar nuestro objeto de estudio como aquel que no distingue orientabilidad. Así pues, luego de haber hecho evidente la falta de orientabilidad en la banda de dos maneras diferentes, daremos paso al análisis de otra característica que encierra la banda. Por tal razón, nos centraremos en esclarecer porque se dice que esta variedad posee un único borde para su superficie, para lo cual realizaremos un paralelo entre un cuerpo esférico y la banda, para posteriormente, complementar el estudio de esta propiedad a partir de la implementación de papel Foamy.

Para llevar a cabo la descripción anterior lo primero que haremos será vincular en nuestro escrito los conceptos de superficie cerrada y abierta. Sabemos que una superficie es cerrada cuando en ella se distingue dos caras; una externa y otra interna. Por el contrario, dada la definición anterior asumimos que una superficie es abierta cuando en ella no se distingue caras. Pues bien, para poder comprender estas dos definiciones, iniciaremos observando la siguiente figura.

Figura 14. Objeto de forma esférica

Iniciaremos diciendo de la figura que en ella se observa un objeto que representa una pelota que toma forma esférica. Además, afirmaremos que este no posee borde sobre su superficie, dando a entender según las dos definiciones anteriores, que en él se distingue dos caras. Para poder hacer valedera esta última afirmación, cubriremos con pintura la superficie que conforma este objeto, para posteriormente, realizar un corte sobre él. El proceso se muestra a continuación.

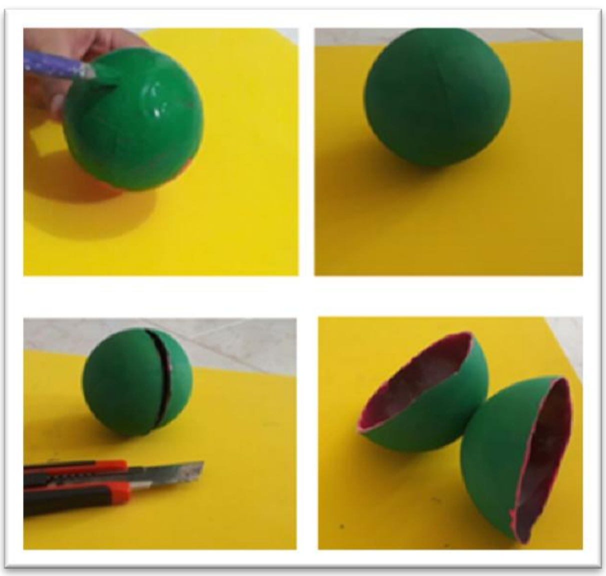

Figura 15. Cortando la forma esférica

Claramente observamos en la secuencia anterior que, al terminar de realizar el corte sobre la superficie de la forma esférica, de ella se desprenden dos cuerpos. Estos a su vez conservan el color con el cual fueron recubiertos cuando aún tenían forma esférica, aunque claramente se observa, que este se percibe únicamente en una sección de los dos objetos. Esta situación da a entender que este cuerpo posee una cara externa, siendo esta la recubierta con la pintura de color verde, Así pues, podríamos afirmar que esta estructura posee una cara externa y una interna, es más, sin temor a equivocarnos, podríamos decir que la cara externa protege la superficie de la cara interna de todo aquello que intente penetrar en ella; como ocurrió con la pintura. Como consecuencia de lo anterior, podemos asegurar que en caso de ser este un objeto abierto (pelota), la pintura permearía la cara interior y en consecuencia, se observaría toda la superficie de la forma esférica (luego de desprenderse en dos objetos), tinturada con color verde.

Ahora bien, siguiendo con el orden de ideas, debemos resaltar que una esfera es un cuerpo que no posee borde. Para dar claridad acerca de esta afirmación, observaremos el proceso que se muestra a continuación.

Figura 16. Delineando un borde

Vemos una parte de la sección de los cuerpos obtenidos luego del corte realizado sobre la forma esférica, resaltada con color blanco. Esta sección es aquella que identificamos como el borde del objeto. Ahora bien, sabemos que estos dos objetos son producto de la forma esférica que proyectamos inicialmente, por tal razón, si unimos estas estructuras a traves del único borde que ambas poseen, el resultado obtenido sería la forma esférica que sometimos a cortes, lo cual da a entender, que este objeto no posee borde. Para dar mayor claridad debemos asimilar que si la forma esférica se genera nuevamente por medio de la unión del borde que ambas estructuras poseen, sencillamente confirmariamos que estos se perderían para el nuevo objeto debido a que en ningun punto sobre su superficie, se observaría rastro del color blanco que indicaban los bordes, lo cual da a entender que en efecto una esfera carece de borde sobre su superficie. Observemos la siguiente figura.

Figura 17. Uniendo las estructuras que poseen borde

Claramente se observa que la descripción anterior se cumple a cabalidad. Vemos como al realizar la unión de las dos variedades se genera una región esférica (pelota), en la cual se hace imposible percibir el rastro blanco que demarcaban los bordes. Con esto podemos asegurar que la estructura esférica que sometimos a cortes carece de borde alrededor de su superficie. Además, podemos afirmar que esta se comporta como una estructura cerrada, pues distingue dos caras. Pues bien, luego de comprender algunos rasgos que adopta para su estructura una esfera, someteremos a estudio nuestro objeto. Para esto realizaremos un cuadro comparativo con la forma que acabamos de estudiar, con la finalidad de hacer evidente porque se dice que la cinta es una variedad abierta que posee un unico borde.

Para hacer evidente estos comportamientos, lo primero que haremos sera recubrir la totalidad de la superficie que demarca la cinta. El proceso consiste en utilizar una cinta de color anaranjado que permita sellar totalmente el color blanco con el cual diseñamos la banda de la figura 6. Este proceso lo podemos evidenciar si retomamos la figura 8. Ahora bien, luego de retomar la idea que trabajamos con anteroridad, mostraremos que para la banda se hace imposible distinguir bordes. Para llevar esto a cabo, proyectaremos lo que a nuestro juicio representa un zoom alrededor de toda la superficie de la cinta. Acalaramos que la idea de trabajo que se muestra a continuación, fue realizada conjuntamente con el grupo de investigación GEDNOL que lidera el Dr Pedro Pablo Cárdenas Álzate, siendo esta utilizada anteriormente, en el trabajo[7] de grado que titula, “La Botella de Klein: Propiedades y aspectos metodológicos utilizando material didáctico y software”. Observemos la figura.

[7] Figura 18 y 19 extraídas del trabajo de grado titulado “La Botella de Klein: Propiedades y aspectos metodológicos utilizando material didáctico y software”.

Figura 18. Zoom sobre la superficie de la Banda de Mobius

Este zoom que realizamos sobre la superficie de la Cinta de Mobius fue representado por medio de papel Foamy. Para entender porque se hace necesario realizar este aumento, debemos tener claro que cuando se cubrió la totalidad de la superficie de la banda (ver figura 8), una parte de ella quedó sin ser cubierta, es decir, parte de ella denotaba un color blanco. Como se observa en la figura 8, se hace imposible por medio de un registro fotográfico observar este rastro de color blanco, aunque con total honestidad, podemos dar testimonio y afirmar que esto ocurre. Pues bien, esta franja de color blanco simboliza los aparentes bordes que posee nuestro objeto de estudio, y para tener claridad sobre la cantidad que esta posee, realizaremos un recorrido a través de estos utilizando una tira de cinta de color verde. El proceso se muestra a continuación.

Figura 19. Recorriendo los aparentes bordes de la Cinta de Mobius

Vemos claramente que al terminar de delinear con color verde los aparentes bordes de la cinta, el color blanco desparece de la banda. También observamos que el recorrido se realizó de manera continua, es decir, la tira de color verde se desplazó en un solo sentido logrando cubrir la totalidad del borde. Para dar mayor claridad sobre esta descripción y así comprender porque la banda posee un único borde, nuevamente realizaremos un paralelo entre la forma cilíndrica y la cinta, aunque en esta ocasión, representaremos un zoom para la estructura cilíndrica indicando los bordes de la misma. Este proceso se muestra a continuación.

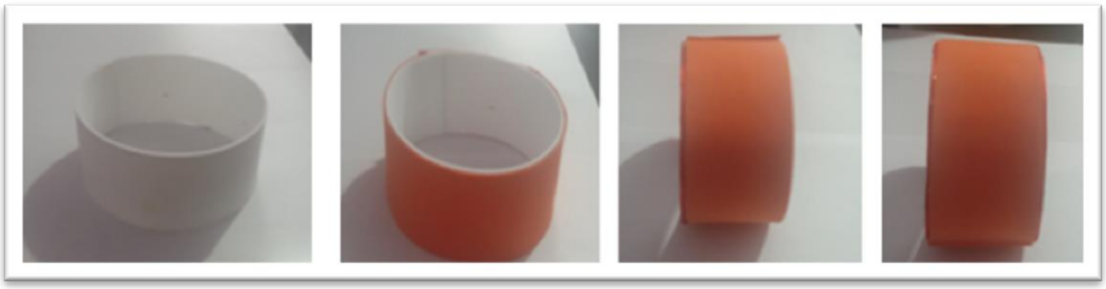

Figura 20. Caras y bordes de la forma cilíndrica

Se observa con claridad como la forma cilíndrica posee dos bordes. Esto lo podemos asegurar porque la estructura presenta dos tonalidades en color verde, que están separadas por una franja anaranjada que simboliza la superficie del objeto. Esta situación sugiere que el recorrido que se realiza por los bordes del objeto no se hace de manera continua, pues para cubrir estos con la tira verde, se hace necesario cortarla y empezar un nuevo recorrido sobre el otro borde. Ahora bien, para la Cinta de Mobius se tiene una situación diferente, pues logramos cubrir de manera continua la sección que demarcaba los bordes (sin cortar la tira de color verde).

Las situaciones anteriores permiten asociar dos nuevas propiedades para nuestro cuerpo de estudio. La primera de ellas garantizar que la banda es una variedad que distingue un único borde para su superficie. La segunda, que la banda es una estructura abierta. Estas dos propiedades resultan del paralelo realizado con la forma esférica y la forma cilíndrica, siendo la primera de ellas, producto del recorrido que se realizó sobre la sección de banda que simbolizaba el borde. La segunda propiedad no resulta tan evidente. Para esto debemos recordar que la forma esférica se comportaba como una estructura que distinguía dos caras (una interna de una externa), siendo una consecuencia inmediata de esta característica, la de generar una estructura cerrada. Ahora bien, si pensamos en la cinta debemos recordar que el resultado obtenido fue el contrario, pues en esta se generó una superficie con una única cara, en la cual no se hacía distinción de exterior ni interior, generando como consecuencia una variedad abierta.

De momento hemos verificado que la Banda de Mobius en un objeto abierto no orientable que posee una única cara y un único borde. A continuación, iniciaremos el estudio de una nueva propiedad, siendo esta aquella que sugiere que según el lugar donde se efectúe un corte sobre su superficie, se obtienen diferentes resultados. Para esto realizaremos dos cortes sobre la cinta, siendo el primero de estos aquel que realizaremos lo más lejos posible del borde que esta posee (como si se tratara del centro de la figura), mientras el segundo corte, se realizará en las cercanías del borde. Observemos el primer corte.

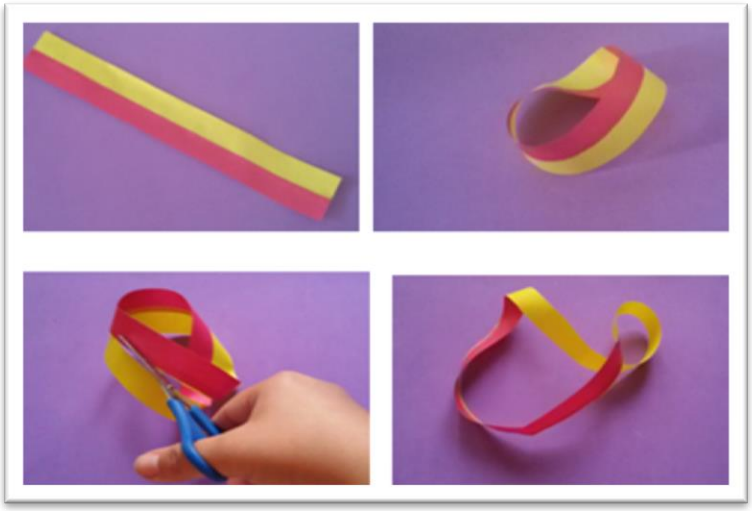

Figura 21. Cortando la superficie de la banda

Antes de seguir trabajando sobre esta propiedad, debemos recordar que una de las nociones topológicas elegidas para trabajar con este objeto recibía el nombre de homeomorfismo, siendo esta entendida como una aplicación entre espacios topológicos en los cuales se preserva el principio de continuidad, producto de una aplicación continua donde su inversa también lo es. Una actividad que resultaría útil para asociar la banda con esta noción tan abstracta de la topología, sería deformar un cuerpo de plastilina en otro. Observemos el proceso.

Figura 22. Manipulando plastilina

Vemos con claridad como una estructura que en principio era esférica, luego de ser sometida a alteraciones, adquiere forma de prisma. Este principio puede ser asociado al de homeomorfismo, pues vemos cómo se logra transformar un espacio en otro sin necesidad de quitar o añadir porciones de plastilina. Además, estas aplicaciones podrían emplearse en diversos espacios, como lo es por ejemplo una forma plana. Observemos la figura.

Figura 23. Deformando la forma esférica

Es claro en la figura que nuevamente la forma esférica se logra deformar en otra estructura de manera continua, pues para lograr el resultado expuesto, no es necesario cortar o enmendar secciones de plastilina sobre la forma inicial. Por último y solo para dar mayor claridad acerca de esta noción, si quisiéramos transformar los objetos finales de las figuras 22 y 23 en los que exponen al inicio de ambas figuras, el proceso resultaría análogo e inverso, pues es evidente que estos podrían deformarse nuevamente en lo que eran en principio (sin cortes ni añadiduras de plastilina), respetando la idea expuesta de continuidad para una función entre espacios. Así damos por entendido que existe una manera visual de aplicar esta noción de la topología, siendo esta manera, aquella que permitirá asociar dicha noción a nuestro objeto de estudio. Retomemos la información que brinda la figura 21.

De la figura 21 se hace claro que el resultado que se obtiene, es difícil asociarlo con la noción de homeomorfismo. Esto debido a que, en las deformaciones anteriores, bajo ninguna circunstancia generamos cortes sobre los cuerpos que deformamos. Ahora bien, debemos recordar que cuando definimos en nuestro marco conceptual los criterios bajo los cuales trabajaríamos las propiedades de la Banda de Mobius, hicimos mención de que en un homeomorfismo se tenía permitido doblar, estirar o cortar una superficie como es el caso, aunque estos criterios intuitivos requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Nuevamente existe una manera de asociar la banda a esta noción, siendo esta el imaginar una esfera homeomorfa al plano complejo, en la cual existe la necesidad de quitar un polo de la superficie para llevar a cabo dicha pretensión, siendo este entendido, como la necesidad de aplastar la forma esférica a su mínima expresión, resultado que se refleja como una sombra sobre uno de los planos del espacio de tres dimensiones (cuando se achata se forma una circunferencia con todo su interior). El resultado sería algo similar a lo expuesto en la siguiente figura[8].

[8] Figura 24, extraída de la página web, con dirección: https://goo.gl/images/FKsghz

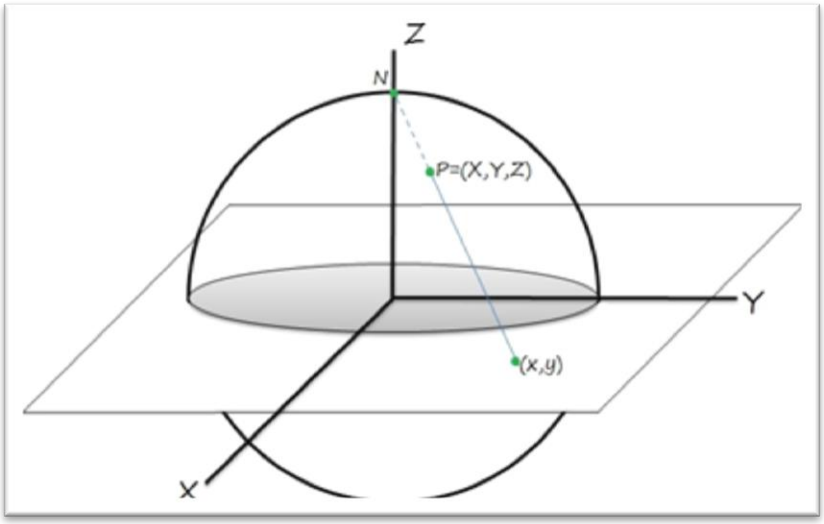

Figura 24. Esfera sin un polo homeomorfa al plano complejo

Pues bien, esta última parte del escrito la hacemos con la finalidad de mostrar que en efecto la banda describe un comportamiento netamente matemático (si se desea conocer en detalle esta particular noción de la topología, se puede consultar en el libro Topología General Teoría y problemas resueltos de la serie Schaum). Ahora bien, como nuestra intención es dar a conocer la banda de manera tal que sea apta para todo público, dejaremos esta noción tan abstracta de la topología a consideración del lector (sea matemático o ajeno a la disciplina), por tal razón, luego de referenciar que bajo la acción de un homeomorfismo se pueden realizar cortes entre espacios y aun así seguimos hablando en términos de la de topología, entonces podemos analizar el resultado que expone la figura 21.

Con total claridad vemos como al terminar de realizar el corte sobre la superficie de la cinta, de esta no se desprenden dos objetos diferentes. Esta propiedad hace alusión a la noción de homeomorfismo descrita anteriormente, pues sobre este objeto realizamos un corte continuo, que, al culminar, arroja como resultado una nueva figura; como si se tratara de un espacio inicial y uno final. Esto permite entender porque se dice que bajo la acción de esta noción de la topología se tiene permitido estirar, doblar e incluso cortar, aun cuando a simple vista, este último concepto aparente violentar la noción de continuidad que se expone en la topología. Pues bien, el paso a seguir sería realizar el segundo tipo de corte que se tiene permitido para la banda (desde el punto de vita topológico), siendo este el que se hace sobre las cercanías del borde. Observemos la siguiente figura.

Figura 25. Cortando la superficie de la banda

Nuevamente observamos como al terminar el corte sobre la superficie de la banda (muy cerca al borde), de este no se desprenden dos objetos, por el contrario, se obtiene una nueva estructura que bajo ninguna circunstancia admite dependencia entre superficies, siendo este un resultado que nuevamente podemos asociar a la noción descrita como homeomorfismo. Para entender a que nos referimos con una estructura que no admite independencias entre superficies, realizaremos un nuevo paralelo entre la región que adquiere forma cilíndrica y la banda. Observemos la figura.

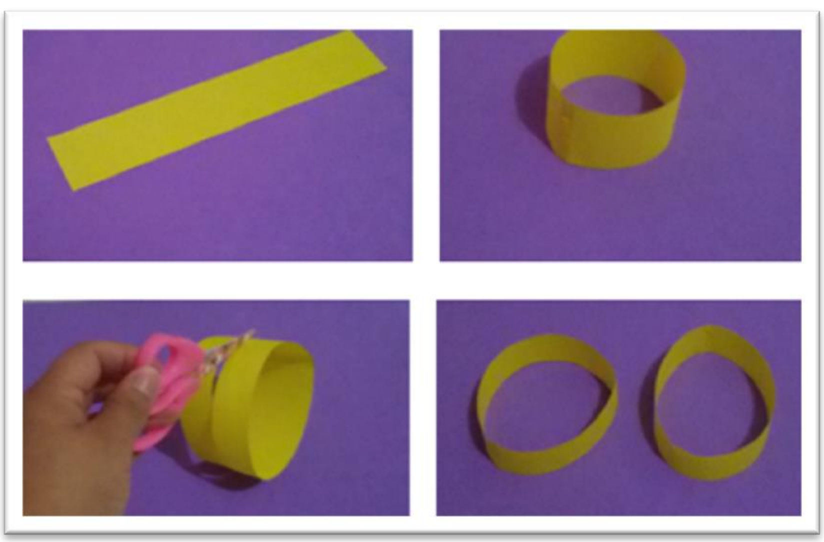

Figura 26. Cortando la superficie de la forma cilíndrica

De la figura se puede decir que, al terminar de cortar la superficie, inmediatamente se desprenden dos objetos de ella. Estos son aquellos a los que nos referimos como independientes, pues observamos como ambos dejan de formar parte de la estructura inicial, generando dos espacios o regiones totalmente aisladas de lo que era la forma cilíndrica. Pues bien, al retomar los cortes que realizamos sobre la cinta tenemos un resultado diferente. En ella vimos como al terminar dichos cortes las estructuras obtenidas seguían perteneciendo al cuerpo inicial, es decir, vimos como los cortes que hicimos sobre la cinta no generaban dos figuras separadas e independientes. Lo anterior se puede entender al decir que la cantidad de papel con la cual diseñamos ambas bandas permanece inalterada luego de ser deformadas, es decir, la sección de papel que ocupa un lugar en el espacio para la banda sin deformaciones, es la misma que para la banda con deformaciones. Si de nuevo utilizamos el paralelo cilindro-banda, podemos asegurar que si tomamos una de las estructuras producto del corte sobre la forma cilíndrica (uno de los dos objetos), se hace imposible encontrar en él la misma cantidad de papel que se utilizó inicialmente para la construcción de la forma cilíndrica, lo cual da a entender nuevamente que los objetos obtenidos por el corte realizado sobre dicha forma, no cumplen con la noción de homeomorfismo, esto debido, a que la cantidad de papel que encierra su superficie no se mantiene inalterada. Para dar mayor claridad acerca de esta afirmación, bastaría con medir el área que encierran las superficies descritas. Para lograr esta medición, debemos conocer los valores aproximados del largo y ancho de la estructura cilíndrica antes y luego del corte, para luego compararlos y verificar si se mantienen inalterados, lo mismo se haría con la banda. Para esto primero observaremos en la siguiente figura, el proceso que se hace necesario para obtener dichas medias.

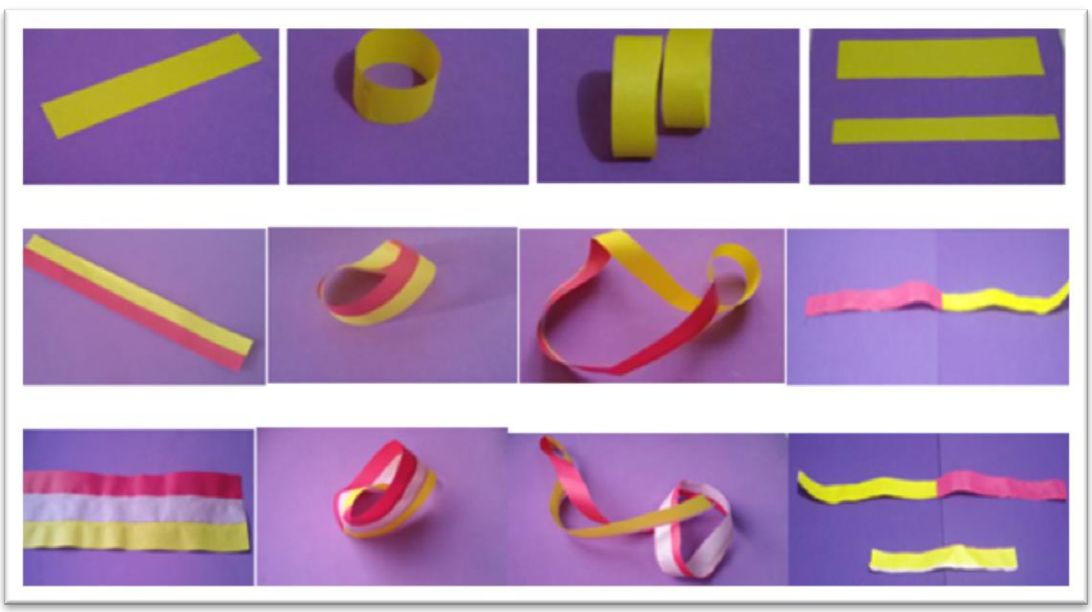

Figura 27. Midiendo el área de dos superficies

Con total claridad observamos que para poder medir el área que encierran dichos objetos, se hizo necesario un corte sobre todas las estructuras, este con la finalidad, de que los objetos adquieran la forma con la cual se diseña una banda (tira rectangular), para luego hacer las respectivas mediciones. Ahora bien, si tomamos como referencia los valores de área que arroja una de las regiones independientes que se generó luego del corte (primera secuencia), vemos que estos corresponden a la mitad del valor que se le asignó inicialmente a la estructura cilíndrica, esto debido a que el largo de la estructura se conserva, pero el ancho se reduce a la mitad, siendo este el factor para establecer que las condiciones de área para ambas estructuras son diferentes. Por otra parte, vemos como para las regiones no independientes el resultado es diferente. Al cortar la figura de la segunda secuencia para poder medir su ancho y largo, vemos como el largo dobló su medida, mientras el ancho, se disminuyó a la mitad. Por tal razón, podemos decir que esta relación entre magnitudes es equivalente, lo cual da a entender, que el área bajo los parámetros iniciales, conserva el mismo valor para la medida de su área, aun cuando los valores en su ancho y largo cambiaron. También vemos como al repetir el proceso para la figura de la tercera secuencia el resultado es el mismo, es decir, para las dos estructuras obtenidas que pertenecen a un mismo cuerpo (porque se encuentran entrelazadas), se tiene que al cortar y realizar mediciones, la primera de ellas conserva el largo de la estructura inicial (la banda sin deformar), aunque el ancho se disminuye a la mitad, mientras en el segundo cuerpo que pertenece a la misma estructura, el ancho se disminuye a la mitad y el largo alcanza el doble de su longitud inicial, siendo esta relación de magnitudes equivalentes con la medida del área que encierra la banda inicial.

Ahora bien, como esta idea para trabajar al área que encierran estas estructuras puede resultar confusa, entonces acudiremos a las mediciones aproximadas de las mismas para entender la mencionada relación de magnitudes. Para esto lo primero que haremos será medir el largo y ancho de la tira rectangular, en procura de realizar posteriores comparaciones. Observemos la figura.

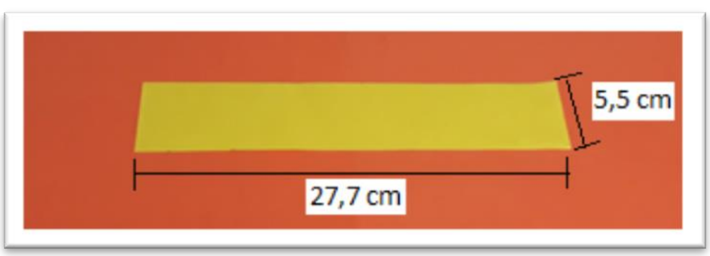

Figura 28. Midiendo el largo y el ancho de la tira rectangular

Vemos claramente que al medir el largo y ancho de ambas estructuras, los valores aproximados son de 5,5cm y 27,7 cm. Si recordamos, el área de una superficie rectangular se puede hallar multiplicando las medidas de sus dos lados, es decir, el largo por el ancho arrojaría el valor del área. Para esta ocasión tenemos que el área aproximada de esta región es $152.35cm^2$. Ahora bien, para seguir con el proceso de comparaciones tomaremos una de las regiones independientes y realizaremos el mismo proceso. Este se observa a continuación.

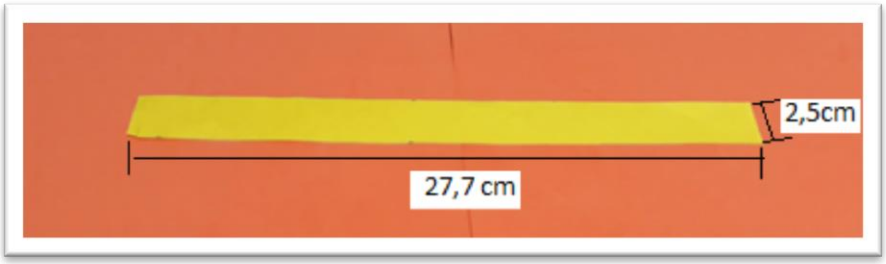

Figura 29. Midiendo el largo y el ancho de la región independiente

Observamos que las medidas para el largo y el ancho corresponden a 2,75cm y 27,7 cm. Estas medidas permiten conocer que el área de esta región es de aproximadamente $76{,}17cm^2$. Este último valor permite garantizar que en efecto la cantidad de área que encierra este cuerpo es diferente a la de la tira rectangular, por tal razón para esta superficie, la noción de invariante topológica no se haría presente. Ahora bien, si realizamos el proceso con la Banda de Mobius el resultado esperado sería el contrario. Detallemos el proceso.

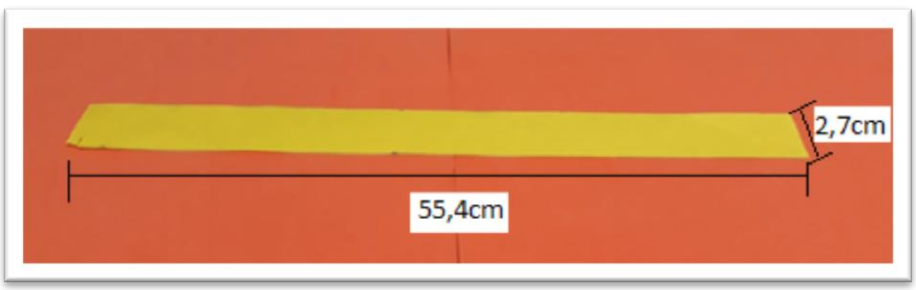

Figura 30. Midiendo el ancho y el largo luego del corte en la banda

Observamos que este primer objeto toma una medida aproximada para el ancho y el largo de 2,75cm y 55,4cm. Estos valores permiten asegurar que para este cuerpo el área corresponde a $152{,}35cm^2$. Ahora bien, al realizar el comparativo con las medidas de la tira rectangular con la que se diseña la Cinta de Mobius, tenemos que los resultados son similares, por tal razón, esta condición de área que se sigue conservando para la banda luego de ser deformada, se puede asociar con aquella noción de la topología que recibe el nombre de invariante topológica, siendo este otro nuevo motivo para asociar los cortes que se realizan sobre esta superficie con la noción de homeomorfismo.

Para dar por terminado el estudio de esta noción que describe la banda nuevamente realizaremos el proceso descrito. En esta ocasión trabajaremos con aquellas regiones a las cuales dimos el nombre de dependientes de una misma estructura. Este proceso se muestra a continuación.

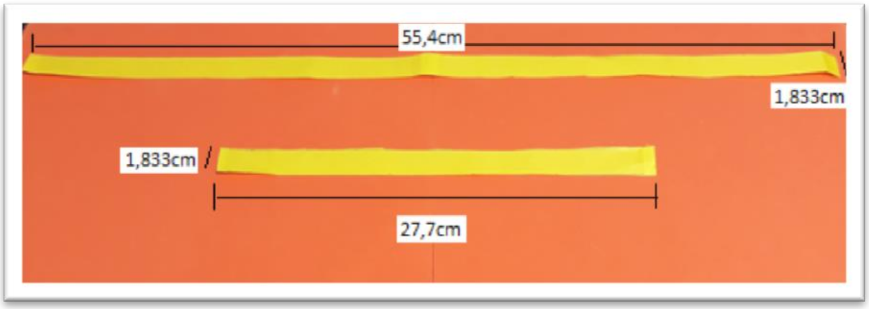

Figura 31. Midiendo al ancho y el largo de las estructuras dependientes

Observamos que los valores obtenidos para el largo y el ancho de los dos cuerpos corresponden a 1,833 cm y 27,7cm para la primera figura, mientras para la segunda obtuvimos los valores de 1,833 cm y 55,4 cm. Ahora bien, si realizamos el proceso para determinar los valores de ambas áreas, tenemos que los resultados aproximados corresponden a 50.77cm^2 y 101,54cm^2 Además, como ambos cuerpos corresponde a una misma estructura (la nombrada dependencia), entonces debemos sumar los valores, siendo el resultado de aproximadamente 152,31cm^2 Este resultado permite verificar que en efecto el área que encierra esta estructura es equivalente a la que encierra la tira rectangular con la que diseñamos la banda, permitiendo concluir nuevamente que la banda obedece a la noción de homeomorfismo y particularmente, que en ella se hace evidente la noción de invariante topológica.

Pues bien, con los procesos anteriores podemos asegurar que las deformaciones que realizamos sobre la Banda de Mobius respetan la noción de homeomorfismo, siendo los resultados anteriores dignos de relacionarlos con las famosas invariantes topológicas (resultados propios de un homeomorfismo), que se refieren a las propiedades que se siguen conservando luego de realizar alguna alteración sobre un objeto geométrico, como lo es el caso.

Hasta este punto del escrito hemos logrado verificar las principales propiedades que describe una Cinta de Mobius; entre ellas la de tener inmersa en su estructura, resultados diferentes dependiendo del lugar donde se efectúe un corte a través de su superficie. Pues bien, a continuación, centraremos nuestro estudio en comprender producto de las propiedades que hemos asociado para la banda, algunos comportamientos que la misma tiene inmersa en su estructura. Para esto seguiremos analizando los cortes que se realizan sobre la cinta, aunque esta vez nos centraremos en entender los comportamientos que se generan en la banda producto de dichos cortes. Para llevar a cabo esta idea de trabajo, lo primero que haremos será dividir en dos regiones la superficie de la banda para luego someterla a un corte. Observemos el proceso.

Figura 32. Superficie de la Banda de Mobius dividida en dos regiones

Claramente observamos que al terminar el corte sobre la superficie de la banda se obtiene una nueva estructura. Esta a su vez tiene un comportamiento diferente al de la cinta. Para entender porque hacemos esta afirmación, realizaremos sobre este objeto procesos similares a los que hicimos con la banda. En caso tal de que una de las propiedades de nuestro cuerpo de estudio no se haga evidente sobre este objeto, el resultado sería afirmar que en efecto la estructura se comporta diferente a la banda. Observemos el proceso.

Figura 33. Recorriendo la superficie de la nueva estructura

Como podemos ver, el resultado obtenido arroja una variedad que posee dos caras. Esto lo afirmamos ya que al recorrer este cuerpo de manera continua como se hizo anteriormente con la banda, fue imposible recubrir toda su superficie, es decir, se observan dos tonalidades sobre el objeto, una en color amarilla y otra con las tonalidades originales, lo cual sugiere que este posee dos caras. Pues bien, vemos como al realizar un corte sobre la banda, aun siendo esta una variedad que tiene inmersa para los cortes la noción de homeomorfismo, se obtiene una estructura que se comporta de manera diferente a la banda (pues la Cinta de Mobius posee una única cara), esta última situación permite entender que en ella luego del corte, no todas sus propiedades se mantienen inalteradas. Para entender porque sucede esta situación, debemos asociar los colores con los cuales diseñamos la banda a una nueva explicación. Para esto debemos entender que el borde que posee la banda está conformado por dos tonalidades diferentes (una en color verde y la otra en color rojo), que a su vez crean dos regiones que se identifican con los mismos colores (verde y rojo), mientras para la estructura que se genera luego del corte el resultado obtenido fue la unión de este borde, es decir, al unirse estas dos regiones se hace imposible observar más distinciones de secciones sobre la superficie. Como es claro que la descripción anterior resulta confusa y difícil de asimilar, realizaremos una banda en la que se permita trabajar con un número mayor de secciones, esto con la finalidad de entender porque asociamos el borde de la Banda de Mobius con el resultado que se obtuvo. Observemos la siguiente figura.

Figura 34. Cinta de Mobius que presenta 10 regiones en su superficie

De la figura podemos decir que en efecto hemos diseñado una banda que posee diez regiones que se resaltan con colores diferentes. Para apoyar la idea expuesta realizaremos un corte similar al que hicimos anteriormente sobre la banda, como si se tratará de dividir en dos partes iguales su superficie. El proceso se detalla a continuación.

Figura 35. Cortando la banda de 10 regiones

De la secuencia anterior podemos concluir que la superficie obtenida nuevamente se comporta de manera diferente a la banda. Esto lo podemos asegurar porque al intentar cubrir la totalidad de la superficie que encierra el objeto de manera continua, vemos que el resultado obtenido es un cuerpo que distingue dos caras; una delimitada por diferentes secciones de color y la otra aquella que cubrimos con la tira azul. Observemos esta descripción.

Figura 36. Recubriendo luego del corte la estructura de 10 regiones

Es claro que esta variedad nuevamente se comporta de manera diferente a la banda. Ahora bien, para entender la naturaleza de estos resultados, podemos acudir a dos maneras diferentes de trabajo. Una de ellas es asociar la estructura obtenida luego del corte con el número de giros que se hacen necesarios para crear una Cinta de Mobius (esta idea de trabajo será tenida en cuenta más adelante), y la segunda sería asociar el resultado con los colores que se desprenden del borde de la cinta. Iniciemos el estudio de esta última descripción.

Para comprender porque los cortes que se realizan sobre la banda lo más alejado posible de su borde generan un cuerpo con características diferentes, debemos tener en cuenta que, para la primera deformación sobre la cinta de diez regiones, el borde de la misma presentaba dos tonalidades; la primera de ellas era de color gris mientras la segunda denotaba un color anaranjado (ver figura 34). También debemos tener presente que al estudiar la estructura que se obtiene luego del corte, podemos asegurar que los colores que demarcaban el único borde que presentaba la banda, se unen en una franja que pertenece a uno de los dos bordes que presenta la nueva estructura (una de las cinco regiones). Para entender esta situación, debemos recordar que, si realizamos el recorrido sobre el borde de la banda, este debería hacerse únicamente sobre las tonalidades gris y anaranjado. Ahora bien, cuando realizamos el recorrido sobre estas tonalidades en la nueva estructura que se genera producto del corte, vemos con total claridad como el andar sobre estas demarca una sección del borde sin recorrer, es decir, se observa una superficie contraria del objeto que se asocia con el borde, en la cual no se hacen evidentes las mencionadas tonalidades, dando a entender, que el objeto distingue dos bordes (uno en color blanco y otro con las tonalidades fucsia y amarillo claro). Observemos la siguiente figura.

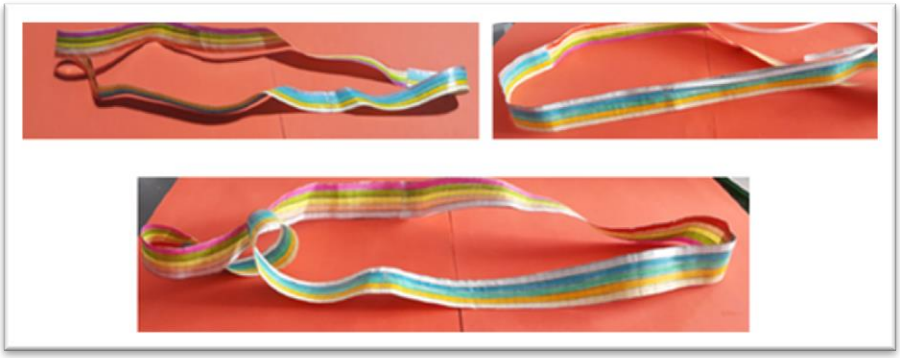

Figura 37. Recubriendo la región con tonalidades anaranjado y gris

De la figura podemos decir que el borde que pertenecía a la banda, se convierte en una región del objeto que se obtiene producto del corte, siendo este el motivo principal para que a pesar de que la transformación de la banda concuerde a plenitud con la noción de homeomorfismo, el resultado no sea una invariante topológica, es decir, que la transformación de la Banda de Mobius no obedezca a un objeto con propiedades semejantes, por tal razón aseguramos que esta variedad no es una banda de Mobius.

Pues bien, luego de hacer evidente porque al realizar este corte continuo sobre la superficie de nuestro objeto de estudio se obtiene una estructura con propiedades diferentes, realizaremos el segundo corte que mencionamos con anterioridad, siendo más precisos, realizaremos una deformación alrededor del único borde que posee la banda, con la firme intención de analizar los comportamientos que este genera. Para esto nuevamente utilizaremos la banda con diez regiones, que posteriormente, deformaremos como se muestra a continuación.

Figura 38. Deformando continuamente sobre las cercanías del borde de la banda

Como ya sabemos este corte genera dos objetos que llamamos con anterioridad dependientes de una estructura. Pues bien, en esta ocasión nos interesa hacer evidente que tipo de comportamiento se produce luego del corte sobre el borde de la banda. Para esto lo primero que debemos resaltar es que, de los dos cuerpos obtenidos, uno de ellos conserva idénticas propiedades y características que la cinta inicial, aunque su única diferencia radica en la cantidad de papel que se asocia entre ambos para su construcción (situación que se trabajó con anterioridad). Pues bien, lo anterior da a entender que el primer objeto representa una Cinta de Mobius, mientras el segundo representa un objeto diferente a la banda. Para entender esta situación, nuevamente verificaremos las propiedades de la cinta en cada uno de los objetos, siendo de vital importancia, resaltar que, si al menos una de las propiedades de la banda no se encuentra inmersa en alguna de las dos estructuras, la consecuencia inmediata sería asegurar que ese es un objeto diferente en el que no se preservan propiedades.

Para llevar a cabo esta idea de trabajo nuevamente asociaremos los colores del borde de la banda con el resultado que se obtuvo producto del corte. Para esto lo primero que haremos será separar ambas estructuras con la finalidad de estudiar en detalle sus comportamientos. Observemos la siguiente figura.

Figura 39. Separando los cuerpos dependientes

Para la figura anterior debemos aclarar que en topología no está permitido añadir o separar secciones sobre objetos geométricos. Por tal razón debemos resaltar que para poder comprender los comportamientos de estos dos cuerpos, nos vemos en la obligación de separar ambos para luego estudiarlos. Además, debemos tener en cuenta que al cortar la variedad nombrada como 1, inmediatamente la estamos uniendo tratando de dar la forma que tenía cuando se terminó de deformar la banda producto del corte. Esto da a entender que en realidad no estamos violentando el concepto principal de la topología que es la continuidad, sino que simplemente por conveniencia y facilidad en la manipulación de ambas variedades, trabajaremos los dos cuerpos por separado asumiendo que los dos siguen conservando todas sus propiedades. Esta descripción la observamos en la siguiente figura.

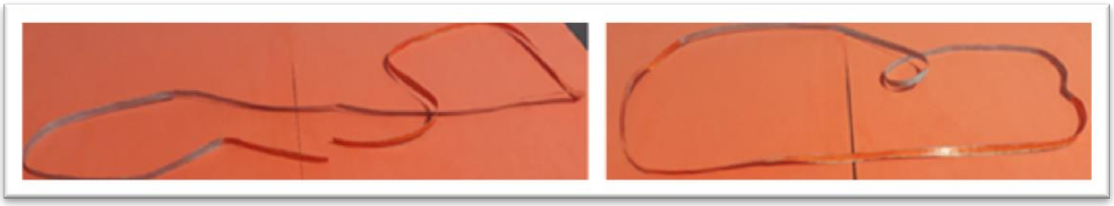

Figura 40. Uniendo la estructura 1

Retomando la información que brinda la figura 38, y observando el objeto señalado como **1**, podemos asegurar que este se obtiene luego de deformar la superficie de la banda, siendo este un cuerpo que a la vez tiene asignados los colores anaranjado y gris en una franja que delimita un aparente borde de dicho objeto. Pues bien, si echamos un vistazo nuevamente a la figura 38, encontramos que estas mismas tonalidades pertenecían al único borde que poseía la banda, por tal razón para la estructura señalada como **1**, podemos asegurar que en efecto esta adopta un comportamiento diferente a nuestro objeto de estudio, pues se hace evidente que al poseer la característica descrita con anterioridad (para el corte lo más alejado del borde), esta debe tener inmersa en su estructura dos caras. Por tal razón diremos que esta estructura que se obtiene luego de realizar un corte continuo sobre la banda, no se comporta como una Cinta de Mobius. Esta última aclaración permite entender nuevamente que, si el borde de la banda que está sin deformar se transforma en una única región para el objeto que se obtiene luego del corte sobre la superficie de la cinta, dicho cuerpo se comportará de manera diferente a la banda. Para dar validez a esta última afirmación, bastaría con verificar que este objeto no cumple con alguna propiedad de la cinta. Miremos la siguiente figura.

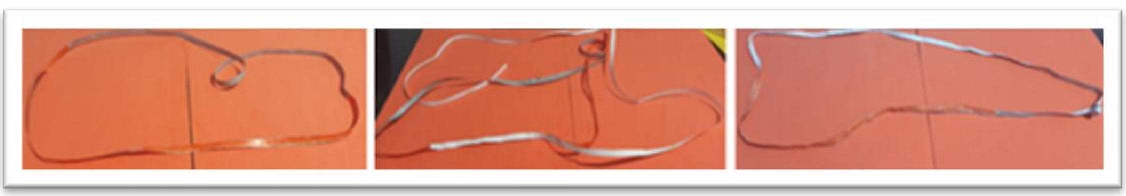

Figura 41. Cubriendo la superficie del objeto 1

Vemos con claridad que el resultado que arroja el cubrimiento de la superficie del objeto 1 es la distinción de caras, es decir, este cuerpo distingue de dos caras que podrían ser asociadas con el interior y el exterior del cuerpo. Por tal razón, con este resultado podemos asegurar que en efecto nuestra última afirmación toma validez, es decir, podemos decir que, si las tonalidades que pertenecen al borde de la Banda de Mobius se reflejan en una sola región o franja para los objetos que se obtienen producto del corte en su superficie, ellos, en definitiva, se comportarán de manera diferente al objeto inicial, siendo más precisos, estos no serán transformados en Cintas de Mobius.

Ahora bien, como ya entendemos por qué se genera el resultado **1** y porqué esta estructura se comporta de manera diferente a la banda, pasaremos a estudiar si las propiedades que tiene inmersa la variedad que llamamos con el nombre de **2**, son similares a las que describe la cinta. Para esto lo primero que haremos será verificar por llamarlo de alguna manera, *la teoría del color para el borde de una banda*. Pues bien, si observamos nuevamente las figuras 38 y 39, vemos como al terminar de cortar la superficie de la cinta, la estructura a la que dimos el nombre de **2** acoge diferentes tonalidades asociadas al borde, esto último lo podemos decir, siempre y cuando esos colores se comparen con los del borde de la banda inicial. Pues bien, para entender porque esta es la estructura que se comporta de manera similar a nuestro objeto de estudio, realizaremos un paralelo que permita entender esta afirmación. Observemos la siguiente figura.

Figura 42. Rebanado un objeto cilíndrico sin tapas

En la figura observamos que el cuerpo inicial posee dos bordes (situación trabajada anteriormente). Además, podemos asegurar que luego de realizar este nuevo tipo de corte, el nuevo objeto sigue con esta misma característica, es decir, sigue con dos bordes (esto se deduce por el cubrimiento realizado sobre los bordes). Si la idea es realizar un paralelo entre este objeto y la banda, debemos idear una manera de realizar un corte de este tipo sobre la cinta, el cual por obligación, tendría que asociarse al que realizamos sobre las cercanías del borde, es decir, cuando realizamos un corte sobre las cercanías del borde de la banda, en realidad lo que estamos haciendo es un rebanado sobre la superficie de la Cinta de Mobius (tal y como se mostró para la estructura cilíndrica, aunque de esta no se desprendan estructuras independientes); como quien dice que de ella estamos extrayendo una gran sección de superficie sin necesidad de alterar las propiedades asociadas al borde. Para dar mayor claridad acerca de esta afirmación, debemos recordar que cuando cortamos el borde de la banda, de esta se desprendieron dos tonalidades que representaban su borde, las cuales estaban asociados con los colores anaranjado y gris. Si fijamos nuestro estudio en esta última descripción, notamos en la figura 38 como las regiones que conformaban el borde y que se desprendieron de la cinta tienen la misma equivalencia respecto a la cantidad de superficie que cada una ocupa en la banda (cantidad de papel), pues se hace evidente que ambas tonalidades formaban parte de una de las regiones con las cuales diseñamos nuestro objeto de estudio, y además sabemos que cada sección, se hizo con idénticas medidas. Por tal razón podemos garantizar que lo que estamos haciendo con este corte, es retirar dos regiones de la estructura en forma equitativa, es decir, para las secciones de superficie que en la figura 42 señalamos con los nombres de a y b, al asociarse con la cinta de Mobius, referimos que a es una porción que podemos asociar con la región de la banda con tonalidad anaranjado, mientras que b, puede ser asociado con la región de tonalidad gris. Lo anterior permite encontrar una estrecha relación con los cortes que se hacen sobre la estructura cilíndrica y la banda, pues los dos pueden asociarse a lo que hemos llamado el rebanado de una superficie, sugiriendo que las propiedades que un cuerpo geométrico posee para sus bordes, deben permanecer inalteradas bajo la condición de un corte que se haga con la condición de rebanado. Por lo tanto, se hace evidente que, si el objeto al que llamamos 2 se obtiene producto del corte rebanado, este en su estructura debe poseer la misma cantidad de bordes que el cuerpo sin rebanar, lo cual permite asegurar, que si el objeto antes de ser rebanado poseía un borde, el nuevo objeto también tiene por obligación que poseer un único borde. Estudiemos esta última afirmación.

Figura 43. Estudiando el borde de la nueva estructura

Vemos con total claridad que la teoría de color que mencionamos anteriormente se hace imposible aplicarla para detectar si este objeto posee un único borde. Por tal razón se hizo necesario realizar el paralelo que permitiera entender porque se obtiene el resultado que explicamos a continuación. De la figura podemos decir que cuando realizamos la verificación del borde del cuerpo, este posee un único borde, pues vemos como al terminar de recubrirlo con la cinta de color blanco, esta se observa sobre la totalidad de la superficie que podemos asociar al borde del objeto. También debemos decir de la figura que como el recubrimiento se realizó de manera continua, en consecuencia, esta variedad tiene inmersa en su estructura un único borde (situación que hemos trabajado con anterioridad). Ahora bien, como ya sabemos que este cuerpo posee un solo borde y entendemos por qué ocurre esta situación, nos vemos en la obligación de verificar sobre el las demás propiedades que describe la banda, para poder garantizar que este cuerpo que se obtiene luego del corte sobre las cercanías del borde de la cinta, en realidad describe los mismos comportamientos que una Banda de Mobius, es decir, que esta nueva variedad es una cinta. Observemos la siguiente figura.

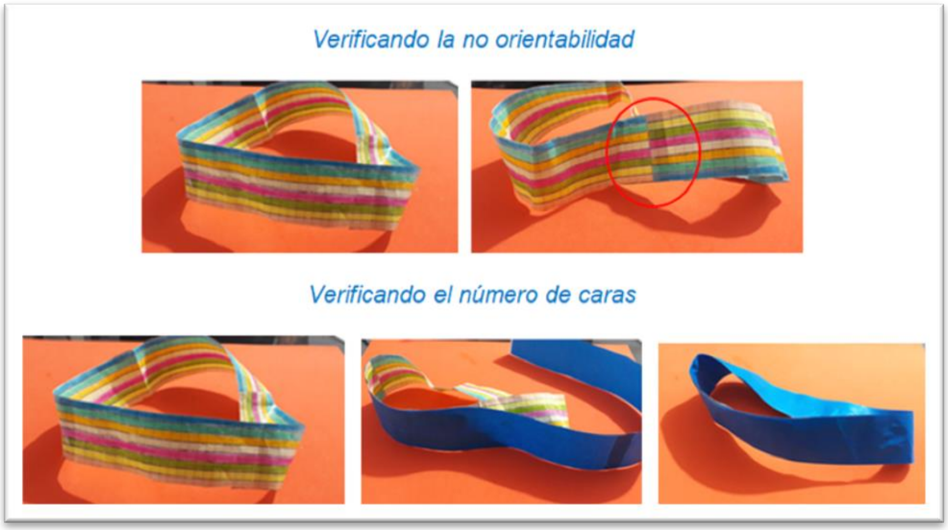

Figura 44. Verificando si el objeto es una Cinta de Mobius

Vemos en la figura que estamos verificando dos propiedades para el objeto. Una de ellas corresponde a la falta de orientabilidad que tiene inmerso nuestro cuerpo de estudio, mientras la segunda, corresponde a la de ser una variedad con una única cara. De la secuencia se hace notorio que los procesos que realizamos con anterioridad sobre la Cinta de Mobius arrojan idénticos resultados sobre esta estructura, es decir, la variedad que se muestra se comporta como una superficie que es no orientable además de poseer una única cara. Estas afirmaciones las hacemos puesto que de la primera secuencia podemos observar como las tonalidades que se asignaban a cada región de la superficie del objeto, no corresponden durante la totalidad del recorrido que se hace sobre el cuerpo, como se diría vulgarmente, en algún punto del recorrido, estas se encuentran intercaladas. También debemos decir que de la segunda secuencia se hace evidente que al terminar de cubrir la superficie del objeto de manera continua con la cinta de color azul, en él se observa un único color, lo cual da a entender, que el cuerpo posee una única cara.

Con esta última afirmación podemos asegurar que dependiendo del lugar sobre el cual realicemos un corte continuo sobre la superficie de la banda, se obtienen diferentes resultados que se pueden asociar con la noción topológica de homeomorfismo. Algunos de estos cortes generan estructuras con comportamientos diferentes a la cinta, mientras otros cortes, generan estructuras dependientes a una superficie en la que se encuentran objetos con idénticas características a la banda, y otros con características diferentes.

Pues bien, luego de realizar el estudio de las propiedades básicas que describe una Cinta de Mobius, y de hacer visibles algunos comportamientos que tiene inmersa la misma producto de cortes continuos alrededor de su superficie, haremos evidente que este cuerpo geométrico tiene inmerso en su estructura un patrón de recurrencia asociado a la cantidad de giros que se necesitan para generar una banda. Para esto lo primero que debemos tener en cuenta es que, para construir nuestro objeto de estudio, necesitamos dar un giro de 180° sobre uno de los dos extremos que posee la cinta, y finalizar su construcción, con la unión de ambos (ver figura 5).

Pues bien, al momento de construir una Cinta de Mobius es evidente que esta se genera únicamente si se hace el giro que se ha indicado con anterioridad, siendo este un motivo para cuestionar si es posible encontrar un patrón de recurrencia a la hora de diseñar una cinta. Para entender esta última descripción, pensaremos si es posible asociar el diseño de una banda, con la existencia de alguna secuencia que permita la construcción de Cintas de Mobius. ¡La respuesta es sencilla! Este patrón de recurrencia se encuentra inmerso en la cantidad de giros que realizamos sobre el extremo de la tira rectangular con la cual diseñamos dicho objeto. Para dar mayor claridad acerca de esta afirmación, doblaremos el número de giros sobre uno de los extremos que compone la tira rectangular (giro de 360°), y terminaremos el proceso uniendo sus extremos. Observemos la siguiente figura.

Figura 45. Giro de 360° sobre la tira rectangular

Claramente vemos que el resultado adopta a simpe vista la forma de un Banda de Mobius. Para verificar si en efecto el cuerpo se comporta como la mencionada cinta, bastaría con comprobar las propiedades que describe nuestro objeto de estudio. En caso contrario, diríamos con total seguridad que el objeto que se forma no corresponde a una banda. Para cumplir con la descripción anterior, la primera propiedad que verificaremos será la de distinguir el número de caras que posee la estructura. El proceso se muestra a continuación.

Figura 46. Numero de caras en la estructura 360°

Claramente observamos que la superficie hace distinción de caras, es decir, se observa una tonalidad fucsia que refleja el recorrido continuo que se hace sobre la superficie del cuerpo, por otra parte, también se observa que dicha tonalidad no cubre la totalidad de la superficie del objeto, lo cual da a entender que el objeto distingue dos caras. Esta situación permite asegurar que si realizamos un giro completo de 360° para generar una estructura (en la cual se unen sus extremos), el resultado no es una Banda de Mobius.

De momento resulta difícil comprender a qué hacemos referencia con el patrón de recurrencia que se asocia para el diseño de una banda. Por tal razón, continuaremos aumentado el número de giros y analizaremos si los objetos que se forman corresponden a bandas. Para esta ocasión realizaremos un giro de 540° sobre uno de los extremos de la tira rectangular para posteriormente, unirlos y formar otra estructura. Esta se muestra a continuación.

Figura 47. Giro de 540° sobre el extremo de la tira rectangular

Nuevamente verificaremos sobre la estructura si las propiedades que describe una Cinta de Mobius se encuentran inmersas para ella. Para esto iniciaremos verificando el número de caras que posee el cuerpo. Observamos la siguiente figura.

Figura 48. Número de caras en la estructura de 540°

Claramente observamos que esta variedad no distingue caras. Esto lo podemos asegurar porque el recubrimiento continuo que se hizo sobre la superficie con la tira de tono rojo, recubre totalmente la estructura. En este punto del escrito debemos aclarar, que no se hará énfasis en explicar porque un objeto cumple con cierta propiedad de la Banda de Mobius, ya que estos procesos son análogos a los trabajados con anterioridad. Para verificar si esta estructura se comporta como una banda, debemos seguir trabajando las propiedades de la misma. Para esto verificaremos si el objeto distingue bordes. Observemos la siguiente figura.

Figura 49. Número de bordes de la estructura de 540°

En la figura observamos la representación del zoom de la superficie del objeto a través de la implementación de papel Foamy. Además, con total claridad vemos que al recorrer los aparentes bordes que posee este objeto, estos se recubren de manera continua con una sola tonalidad, lo cual da a entender, que el cuerpo no distingue bordes, es decir, posee un único borde.

A continuación, verificaremos si en esta variedad se hace evidente la falta de orientabilidad que posee una banda. Para lograr esta verificación, en esta ocasión utilizaremos un material traslucido (acetato), que permita la construcción de dicha forma. Para esto debemos tener en cuenta, que la idea para trabajar la falta de orientabilidad en este objeto, consiste realizar el recorrido a través de su superficie, aunque en esta ocasión vincularemos una manera diferente pero similar en teoría, para determinar si este cuerpo es o no orientable. Para esto debemos tener en cuenta que en la variedad de acetato se distingue tres tipos de flechas. La primera de ellas es de color café; que indica el punto exacto desde el cual iniciamos la travesía sobre su superficie. La segunda de ellas es de color rojo; que indica el sentido o dirección en el cual nos movemos sobre la superficie del objeto. La tercera de ellas es de color anaranjado; que resalta algunos de los puntos sobre los cuales nos hemos desplazado en la superficie de la estructura. La descripción anterior se observa a continuación.

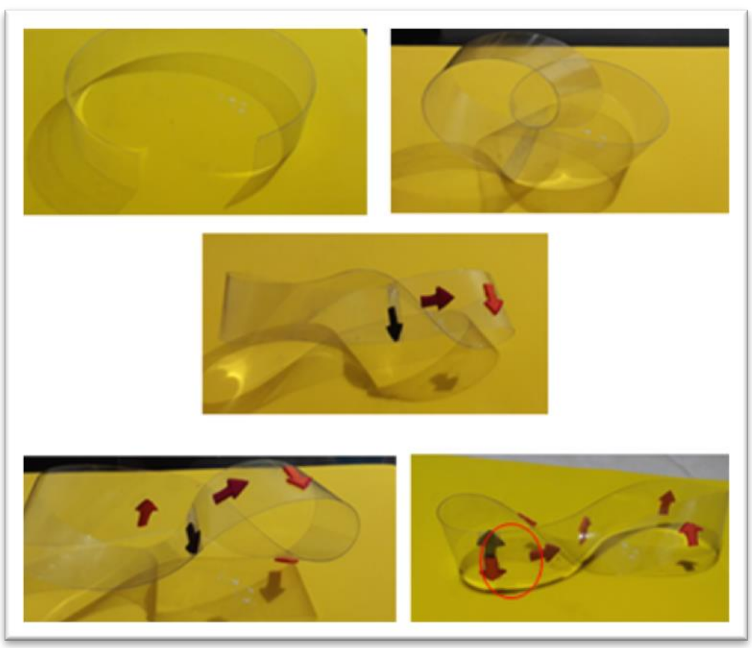

Figura 50. Estructura de 540° construida en acetato

De la figura podemos decir que cuando iniciamos el recorrido sobre la superficie del objeto, llega un punto en el cual se hace notoria la falta de orientabilidad del objeto, siendo este aquel que resaltamos con color rojo. Para entender el porqué de esta afirmación, debemos tener claridad en que, al momento de dar inicio al recorrido, la flecha de color café apunta en una dirección específica (apunta hacia 1). Por otra parte, cuando la flecha anaranjada se encuentra por llamarlo de alguna manera en la contracara de dicho punto, vemos cómo cambia su sentido de orientación, es decir, la flecha de color anaranjado apunta en dirección contraria a la que apuntaba la flecha café antes de iniciar el desplazamiento. Esto sugiere que si el desplazamiento se hace en el mismo sentido en todo momento y de manera continua, la consecuencia sería asegurar que el objeto no distingue orientabilidad, en otras palabras, el cuerpo geométrico es no orientable.

Siguiendo con el orden de las propiedades, nos faltaría verificar que ocurre en este objeto cuando realizamos cortes sobre su superficie. Para esto nuevamente cortaremos de manera continua la sección más alejada del borde (como si se tratara de cortar la franja central), y posteriormente cortaremos sobre sus cercanías al borde. Observemos los resultados en la siguiente figura.

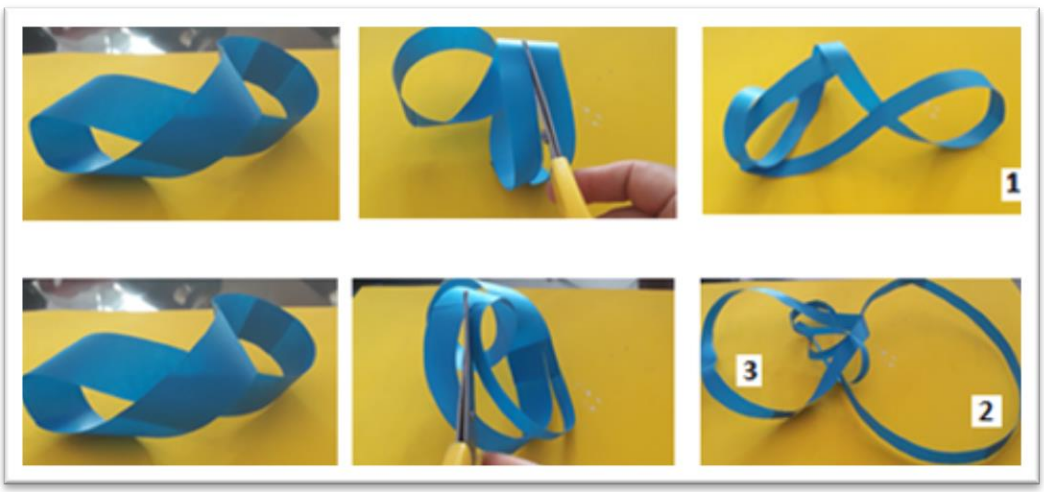

Figura 51. Cortes sobre la estructura de 540°

Claramente observamos que ambos cortes arrojan resultados similares a los de una banda. Es más, las estructuras obtenidas adquieren los mismos comportamientos que aquellas que se generan por una banda de 180°. Para hacer evidente esta afirmación comprobaremos la cantidad de caras que posee cada estructura, y simplemente daremos constancia de que las demás propiedades para una de las estructuras que se obtienen producto del corte sobre las cercanías del borde, son los de una Cinta de Mobius como es de esperar (esto con la finalidad de no repetir nuevamente los procesos anteriores). Observemos la figura.

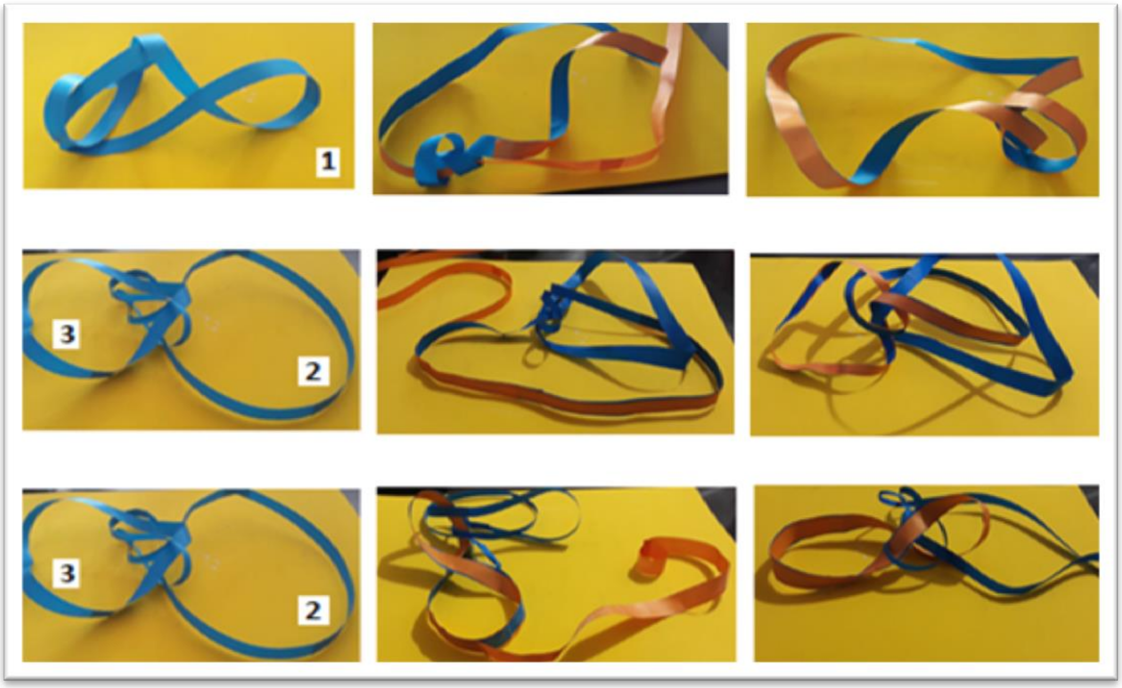

Figura 52. Verificando la existencia de caras en las estructuras 540°

Vemos que al recubrir las aparentes caras que posee el objeto señalado como 1, el resultado es la distinción de caras. Esto lo aseguramos ya que observamos una tonalidad diferente a la escogida para recubrir su superficie, es decir, se observa luego de cubrir continuamente la estructura, una cara con color anaranjado, y la otra con color azul. Si analizamos la estructura señalada como 2 el resultado es similar, pues vemos como esta variedad denota dos tonalidades diferentes sobre su superficie, una de ellas con color anaranjado y la otra con color azul, lo cual nuevamente sugiere que al terminar de recubrir el objeto, en él se hace evidente la distinción de caras. Por último, si analizamos el objeto que nombramos como 3, observamos que el resultado es diferente. En este se observa que al terminar de sus aparentes caras de manera continua, no se hace evidente la distinción entre caras, esto consecuencia de observar una sola tonalidad de color anaranjado sobre la totalidad de su superficie. Pues bien, del objeto que nombramos como 3 debemos decir que no verificaremos todas las propiedades que se deben cumplir para que se comporte como una cinta, eso sí, damos total certeza que nuestro estudio arrojó que en efecto este se comporta como tal (esto último solo lo decimos porque sería muy repetitivo nuestro escrito, y según nuestro criterio, no se hace necesario).

Pues bien, de momento hemos logrado verificar que este objeto que se construyó con un giro de 540° sobre uno de los extremos de la tira rectangular, se comporta como una Cinta de Mobius. Esto debido a que tiene inmerso en su estructura las propiedades básicas de una banda. Por tal razón seguiremos buscando el patrón que nos permita asegurar el diseño y construcción de una Cinta de Mobius. Para esto realizaremos dos giros completos que se simbolizan como 720° sobre uno de los extremos de la tira rectangular. Observemos la figura.

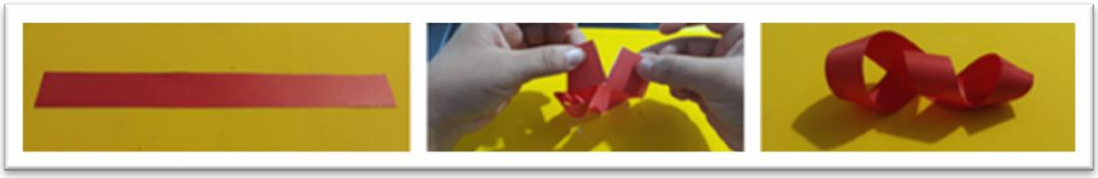

Figura 53. Giro de 720° sobre la tira rectangular

Nuevamente verificaremos si la estructura posee las propiedades de una Banda de Mobius. Para esto indicaremos si existe distinción de caras en el cuerpo con un proceso análogo a los realizados con anterioridad. Este proceso se expone a continuación.

Figura 54. Número de caras en el objeto de 720°

En la figura observamos que este cuerpo distingue entre caras. Esto lo podemos asegurar debido a que al terminar de recubrir de manera continua la superficie del objeto, en él se hacen evidentes dos tonalidades diferentes para su superficie, siendo esta descripción, aquella que hemos trabajado con anterioridad para la banda. Por tal razón aseguramos que no es posible generar un objeto con características idénticas a la Banda de Mobius, si realizamos un giro de 720° sobre uno de los extremos de la tira rectangular. Así pues, seguiremos aumentando el número de giros para seguir en la búsqueda de aquel patrón de recurrencia que mencionamos con anterioridad. Este proceso se muestra a continuación.

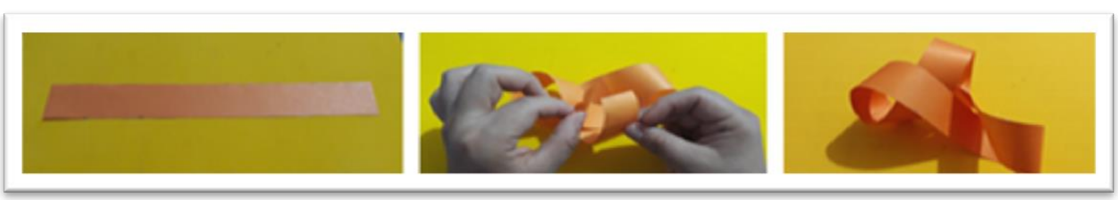

Figura 55. Giro de 900° sobre la tira rectangular

De nuevo obtenemos una estructura que será sometida a estudio. Nuevamente, lo primero que haremos será verificar la cantidad de caras que posee el objeto. Observemos la siguiente figura.

Figura 56. Número de caras en el objeto de 900°

Observamos que este objeto posee una única cara. Esto lo podemos asegurar ya que al recubrir la totalidad de la superficie se observa una única tonalidad. El paso a seguir sería verificar la existencia de un único borde para el objeto.

Figura 57. Cantidad de bordes de la estructura de 900°

Reiteradamente observamos que el proceso a realizar es la representación de un zoom sobre la superficie del objeto. También observamos que se hace evidente que el cuerpo posee un único borde, pues al igual que en las descripciones anteriores, este se logra recubrir en su totalidad con una única tonalidad. Por tal razón pasaremos a verificar la falta de orientabilidad que posee el objeto, para lo cual implementaremos nuevamente el material traslucido que utilizó para la construcción de la banda de 540°. Observamos la figura.

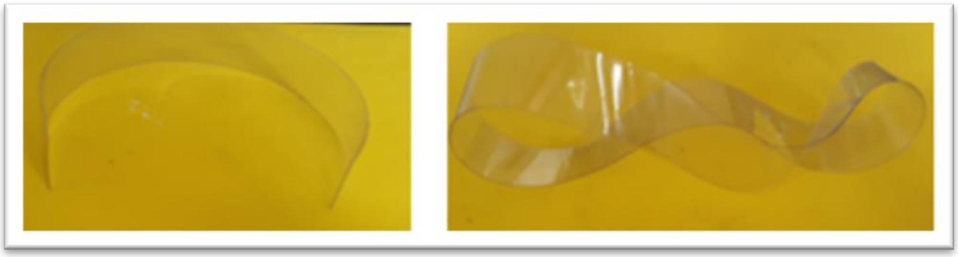

Figura 58. Estructura de 900° construida en acetato

Nuevamente trabajaremos con la idea de las tres flechas que indican la dirección y algunos desplazamientos sobre la superficie del objeto. Recordemos que la primera de ellas es de color rojo; que indica el punto exacto desde el cual iniciamos la travesía sobre su superficie. La segunda de ellas es de color verde; que indica el sentido o dirección en el cual nos movemos sobre la superficie del objeto. La tercera de ellas es de color azul; que resalta algunos de los puntos sobre los cuales nos hemos desplazado en la superficie de la estructura. La descripción anterior se observa a continuación.

Figura 59. Desplazamientos sobre la variedad de 900°

Nuevamente observamos un resultado similar al obtenido para la estructura formada por un giro de 540° sobre uno de sus extremos. Vemos claramente que en la contracara del punto en el que ubicamos la flecha de color rojo (sabemos que la variedad no distingue contracara, pero es la manera de asimilar el proceso), se encuentra una flecha de color azul que se ha desplazado continuamente sobre la superficie del objeto en la dirección que apunta la flecha de color verde. También observamos que la dirección en que apunta la flecha de color azul cambia con respecto a la posición inicial, es decir, en el punto que se da inicio al recorrido sobre la superficie del objeto (flecha de color azul), se observan dos flechas de colores diferentes que apuntas en direcciones diferentes hacia afuera del cuerpo; la primera obviamente es la de color rojo mientras la segunda es aquella de color azul. Por tal razón, siendo estas flechas cambiantes de dirección sobre dicho punto (como si se tratara de una contracara), podemos asegurar que este objeto no distingue orientabilidad para su superficie, es decir, esta variedad es no orientable.

Por último, para esta estructura de 900° como la hemos llamado, quedaría por verificar que ocurre con los cortes que se realizan sobre su superficie. Nuevamente una de ellos se haría sobre las cercanías del único borde que esta posee, mientras el segundo, se debe realizar como si se tratara de cortar la parte central del cuerpo. Los resultados son los siguientes.

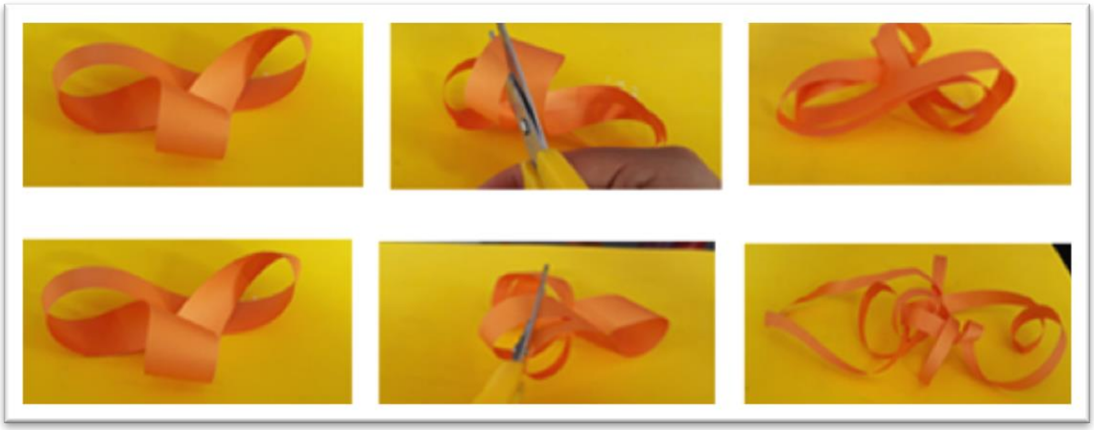

Figura 60. Cortes sobre la superficie del cuerpo de 900°

Claramente observamos que de ambos cortes se obtienen resultados similares a los del objeto de 540°. Es más, los resultados son idénticos en comportamiento, lo cual conduce a que del corte sobre la franja central se despenda un objeto que distingue caras (por tal razón no es banda), mientras para los objetos que se obtienen producto del corte sobre las cercanías del borde, se obtiene uno que distingue entre caras y otro que no lo hace. Observemos la figura.

Figura 61. Recubriendo las caras de los cuerpos de obtenidos en los cortes

Claramente vemos que la descripción gráfica corresponde a los procesos expuestos con anterioridad para la variedad de 540°. Por tal razón podemos asegurar que este objeto se comporta como una Cinta de Mobius, pues este presenta todas sus propiedades básicas.

Hasta el momento hemos logrado verificar que nuestro objeto de estudio puede ser generado a partir de la unión de sus extremos, claro está, realizando giros de 180°, 540° y 900° sobre uno de los extremos de la tira rectangular que simboliza su polígono fundamental. También hemos verificado que una Cinta de Mobius es imposible de generar producto de giros en uno de sus extremos, si tomamos en cuenta los valores de 360° y 720°. Esta situación permite asociar un patrón de recurrencia para el diseño y construcción de una banda. Este patrón se asocia a la cantidad de giros que realizamos sobre uno de los extremos de la tira rectangular con la que construimos dicho objeto, haciéndose necesario generar hasta el momento, giros múltiplos impares de 180° para su construcción, es decir, si realizamos giros producto de la multiplicación entre 180 y los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,…, el objeto geométrico que se obtiene aparentemente corresponde a una Cinta de Mobius, por otra parte, al realizar giros producto de la multiplicación entre 180 y los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,…, el cuerpo que se obtiene aparentemente no corresponde a una cinta. La afirmación anterior la hacemos porque en nuestro estudio hicimos este análisis para 18 giros diferentes sobre uno de los extremos de la tira rectangular (nueve para múltiplos pares de 180 y nueve para sus múltiplos impares), conllevando cada uno de los resultados, a pensar que en efecto podría existir este mencionado patrón de recurrencia para la construcción de una Cinta de Mobius. Por tal razón aseguramos que, para efectos de nuestro estudio, existe un patrón de recurrencia por lo menos para construir las primeras nueve Cintas de Mobius, las cuales corresponden a realizar giros sobre uno de sus extremos de 180°, 540°, 900°, 1260°, 1620°, 1980°, 2340°, 2700° y 3060°. Así pues, podríamos decir que para cualquier persona interesada en estudiar el comportamiento de una Cinta de Mobius, resultaría de vital importancia asociar la anterior descripción a procesos matemáticos de sumatorias o sucesiones, siendo estas vinculadas, con la cantidad de giros que se hacen necesarios para poder determinar por medio de una demostración matemática, que en efecto existe un patrón de recurrencia para el diseño de este objeto. Aclaramos que esta última descripción escapa de nuestras pretensiones, pues hemos sido muy claros desde el inicio de nuestro escrito en querer mostrar los comportamientos que este objeto tiene inmerso, de una manera informal, apoyados de diversos materiales que escapan de la cotidiana rigurosidad que ofrece la disciplina matemática. Por tal razón dejaremos este aspecto como una de las cuestiones abiertas que deja nuestro estudio.

Luego de comprender que la banda de Mobius es un cuerpo geométrico no orientable que posee una sola cara y un único borde, que tiene inmersa en su estructura algunas nociones de la topología, y que posiblemente existe un patrón de recurrencia para su diseño, analizaremos una nueva característica propia de la cinta a partir de la teoría de dimensiones, siendo más precisos, vincularemos la estructura de la misma al espacio de tres dimensiones, por tal motivo, se hace necesario recrear a partir de los conceptos de aristas y vértices, un método que permita incorporar de manera clara, visual y didáctica, que la banda se encuentra inmersa en dicho espacio.

Para esto lo primero que haremos será denotar para nuestro caso, la primera dimensión está compuesta por una arista, en la cual se vincula la existencia de dos vértices. Además, de esta estructura dimensional debemos resaltar que a cada vértice se le asigna una sola arista que desprende de él. Para comprender esta descripción observemos la siguiente figura.

Figura 62. Estructura del espacio de una dimensión

Como vemos en la figura, se hace claro que la descripción anterior se refleja totalmente en el objeto construido con palillos. Ahora bien, esta descripción será la base para comprender porque decimos que la estructura con la que se diseña la Cinta de Mobius, se encuentra inmersa en el espacio de tres dimensiones. Para esto seguiremos adentrándonos en el estudio dimensional como se hará evidente a continuación.

El paso a seguir sería diseñar una nueva dimensión, que llamaremos espacio de dos dimensiones. Pues bien, la idea consiste en aumentar el número de aristas y vértices teniendo en cuenta que, si estos aumentan, como consecuencia, las aristas que se desprenden de cada vértice también lo harán. Siendo más precisos, podemos garantizar que, para nuestro estudio, el espacio de dos dimensiones estará conformado por dos aristas que se desprenden de un vértice en común, como se muestra a continuación.

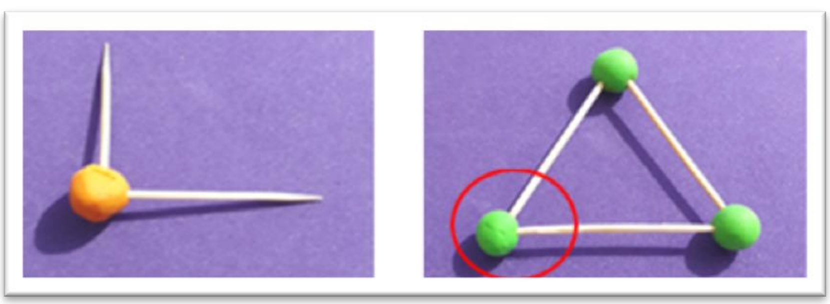

Figura 63. Estructura del espacio de dos dimensiones

Vemos como en la figura se relacionan dos objetos. El primero de ellos como ya dijimos representa el mencionado espacio de dos dimensiones, mientras el otro, representa un objeto que se encuentra inmerso en él. Ahora bien, garantizamos que en efecto este cuerpo está inmerso en dicha dimensión, puesto que de cada arista se desprenden dos vértices (sección resaltada), por tal razón, podría pensarse en que si quisiéramos construir una nueva dimensión (espacio de tres dimensiones), bastaría con aumentar una nueva arista que se desprende de cada vértice, y en consecuencia, toda estructura que se encuentre inmersa en este espacio, estaría sujeta a dicha recurrencia, dando a entender, que la cantidad de aristas que se desprenden de cada uno de los vértices de un objeto inmerso en esta dimensión, serían tres. Para comprender la descripción anterior observaremos la siguiente figura.

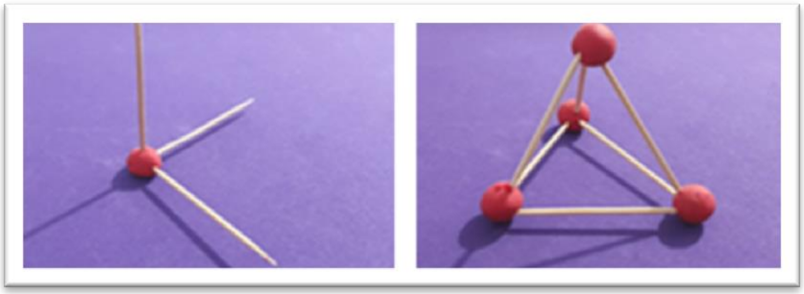

Figura 64. Estructura del espacio de tres dimensiones

Vemos como nuevamente se asocia el espacio tridimensional con la estructura de un objeto. Como consecuencia de lo anterior, diríamos que dicho cuerpo se encuentra inmerso en el espacio de tres dimensiones, pues se hace claro que de cada vértice se desprenden tres aristas. Ahora bien, luego de exponer nuestra idea acerca de la teoría de dimensiones, retomaremos nuestro objeto de estudio. Para esto lo primero que haremos será recordar que el diseño de la Cinta de Mobius lo hicimos con una superficie rectangular (tira de papel), y, en consecuencia, podemos asegurar que esta se encuentra inmersa en el espacio de tres dimensiones. Para dar claridad sobre esta afirmación, observaremos la siguiente figura.

Figura 65. Silueta de la Cinta de Mobius

Pues bien, de la figura podemos decir que en efecto la banda se construye con una tira rectangular en la cual se unen sus extremos luego de dar un giro de 180°, como ya sabemos. Ahora bien, la manera de asociar esta estructura con la teoría dimensional, sería aplicando un zoom sobre toda la superficie de la Banda de Mobius, que, para efectos de nuestro estudio, representamos por medio de papel Foamy como se muestra a continuación.

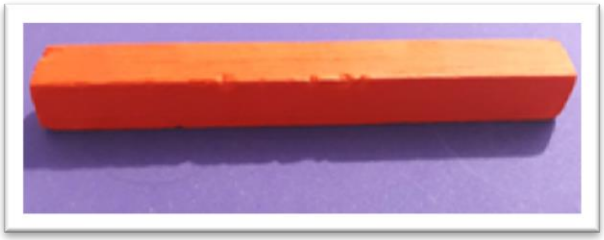

Figura 66. Zoom sobre la superficie de la Cinta de Mobius

El zoom que observamos permite identificar que la tira rectangular toma volumen, esto se debe a que el papel con el cual fue construida posee un espesor muy mínimo, que, en consecuencia, genera que se haga imperceptible a simple vista que la tira tiene volumen. Pues bien, en este punto podríamos asegurar que la banda es una estructura inmersa en el espacio de tres dimensiones, pero como nuestra pretensión es asociarlo con la teoría expuesta anteriormente, seguiremos analizando dicho zoom. El paso a seguir sería recubrir todo el borde de la estructura de Foamy, para lo cual utilizaremos palillos y plastilina como se hace evidente a continuación.

Figura 67. Recubriendo el borde del objeto de Foamy

Claramente observamos en la figura que la totalidad del borde se recubre con los palillos, ahora bien, para enlazar esta representación del zoom con la teoría ya expuesta, diluiremos la superficie del material de Foamy, como se muestra a continuación.

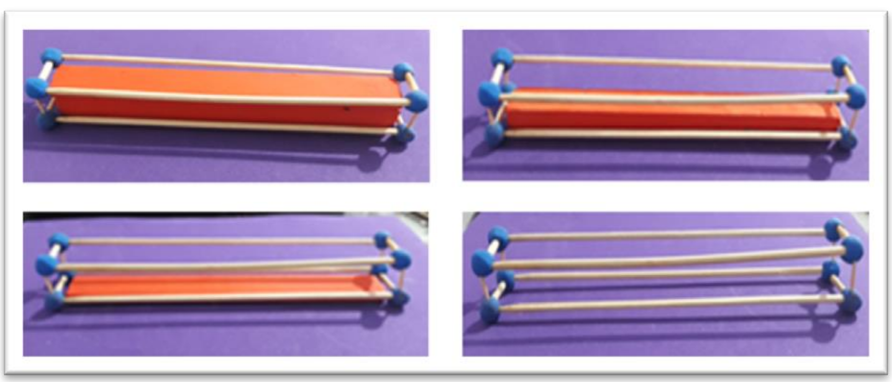

Figura 68. Diluyendo la superficie del objeto de Foamy

Vemos con claridad que al diluir totalmente la superficie del cuerpo de Foamy, podemos asociarlo con la teoría de dimensiones que expusimos con anterioridad, pues se hace notorio que este objeto se encuentra inmerso en el espacio de tres dimensiones, puesto que de cada uno de sus vértices se desprenden tres aristas, y en consecuencia, podemos garantizar que la superficie con la cual construimos la Banda de Mobius se encuentra inmersa en el espacio de tres dimensiones. Por lo tanto, si la banda es producto de dicha estructura (uniendo sus extremos luego de realizar un giro de 180°), entonces la misma debe respetar dicha analogía, lo cual sugiere que la cinta misma está inmersa en el espacio de tres dimensiones, y como consecuencia, podemos afirmar que la Cinta de Mobius es un cuerpo geométrico tridimensional.

Así pues, damos por terminado el estudio de las propiedades y los comportamientos que la Cinta de Mobius encierra para su estructura. Por tal razón, daremos paso a analizar algunas consecuencias que se generan desde este objeto producto de sus propiedades y comportamientos.

6.3. Algunas aplicaciones de la Cinta de Mobius

Luego de realizar un estudio extenso y detallado acerca de las propiedades y el comportamiento de la Banda de Mobius, analizaremos como este objeto puede ser utilizado en la enseñanza de algunos conceptos de la relatividad, como lo es, por ejemplo, la teoría de marcos inerciales. Además, analizaremos y estudiaremos como este objeto consecuencia de deformaciones continuas sobre su superficie, genera un nuevo cuerpo geométrico que recibe el nombre de Botella de Klein. Por lo tanto, apoyados en la figura, daremos inicio al estudio de la primera descripción.

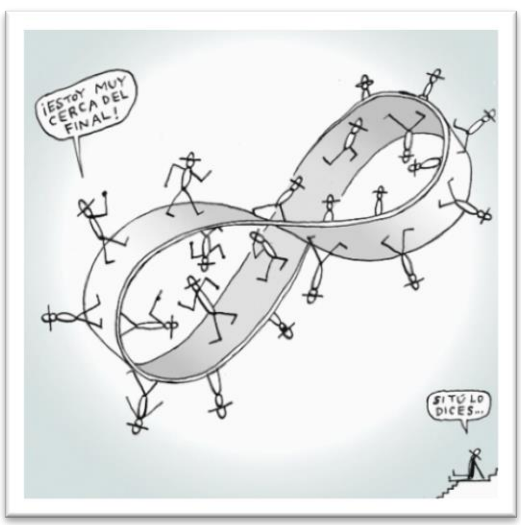

Figura 69. Recorriendo la superficie de una cinta de Mobius

Observamos en la figura[9] una situación en la que intervienen dos personas diferentes. Una de ellas realiza el recorrido sobre la superficie de la Cinta de Mobius, mientras la otra, observa los desplazamientos que la primera persona realiza sobre la banda. Además, vemos como ambos personajes tienen diferentes perspectivas acerca del desplazamiento que se realiza sobre la cinta, pues una de ellas intenta dar fin al recorrido que realiza sobre la banda, mientras la otra, observa el fallido intento de su compañero en dar fin al mismo. Esta situación puede relacionarse con la teoría de sistemas inerciales que se plantea desde el marco teórico de la Relatividad. Ahora bien, para lograr asociar dicha descripción con la teoría de marcos inerciales, debemos aclarar que las dos personas serían aquellas que sustentarían dicha teoría; pues mientras el primero se encuentra en un punto fijo (persona que observa el recorrido), el segundo se encuentra en movimiento constante a una distancia considerable de la otra persona (persona que recorre la banda). Ahora bien, como la idea consiste en hacer visible que la banda podría ser tenida en cuenta como recurso para la enseñanza de la teoría de marcos inerciales, entonces nos vemos en la obligación de dar a conocer en que consiste la idea básica de esta teoría.

Para llevar a cabo la idea expuesta anteriormente, acudiremos a un clásico ejemplo de esta teoría, en el cual dos personas se encuentran en automóviles diferentes que se desplazan uno en frente del otro, con idénticas velocidades, aceleración constante y en línea recta, sobre una autopista que no presenta resaltos (como si no hubiese fricción). Adicionalmente, los autos están totalmente aislados del medio, es decir, las dos personas solo pueden ver hacia afuera del carro por un orificio que apunta exactamente al frente del móvil en el que se encuentra la otra persona. De esta situación podemos decir que de ser posible conseguir dichas condiciones de desplazamiento, en el momento en que uno de los dos desee mirar hacia el exterior del auto, asumirá que el vehículo en cual se encuentra no está en movimiento, pues en este caso, la perspectiva que tendrá en todo el trayecto será un automóvil, que para su caso, parecerá estar quieto, esto siempre y cuando se respeten todas las condiciones mencionadas con anterioridad. Pues bien, para hacer evidente esta descripción observaremos la siguiente figura.

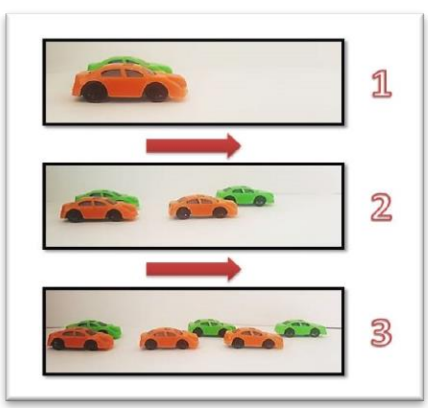

Figura 70. Automóviles en movimiento

[9] Figura extraída de la página con dirección web https://ztfnews.wordpress.com/2010/06/11/%C2%BFque-es-una-banda-de-mobius/

De la figura se hace evidente que para ambos observadores resulta imposible distinguir que los autos en los que se encuentran describen movimiento. Esto puede ser entendido como la necesidad que existe para ellos de asociar el desplazamiento, con algún movimiento brusco debido a la fricción que refiere una autopista en condiciones normales, pues sabemos que estas en todo su trayecto presentan resaltos debido a que se construyen con asfalto. Ahora bien, para dar mayor claridad acerca de la mencionada teoría de marcos inerciales, analizaremos una nueva situación en la que intervienen las mismas personas.

Para esta nueva situación, tomaremos como referencia dos automóviles que se mueven a velocidades diferentes y aceleración constante, y por supuesto, conservando la situación de desplazamiento ya descrita; en línea recta y sin resaltos sobre la autopista. Además, debemos resaltar que nuevamente la única vía para mirar al exterior del vehículo, es el orificio (ventana), que se planteó anteriormente. Pues bien, siendo convenientes con nuestro estudio, pensaremos en que ambas personas observan al exterior del vehículo al mismo tiempo, y que justo en ese momento, los dos autos se encuentran exactamente uno en frente del otro. En este caso las personas verán como los vehículos se alejan uno del otro, esto debido a que cambian ciertas condiciones del marco inicial. Para hacer evidente dicha descripción, observemos la siguiente figura.

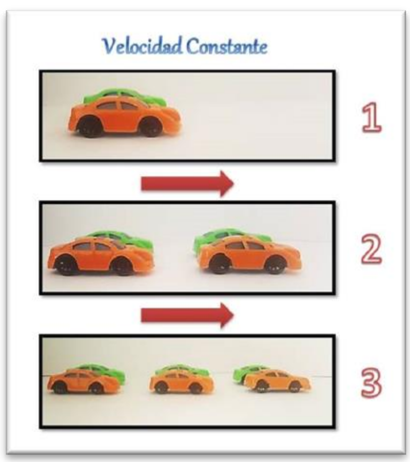

Figura 71. Automóviles en movimiento

Estas dos descripciones permiten comprender que una situación puede tomar diferentes perspectivas dependiendo de las condiciones o parámetros bajo los cuales se desarrolle, siendo estos los que conforman los diferentes marcos inerciales a los que puede estar sujeta alguna situación. Pues bien, luego de dar algo de claridad acerca de esta teoría, retomaremos nuestro objeto de estudio.

Las descripciones anteriores permiten asociar la Banda de Mobius con el estudio de sistemas inerciales. Para esto debemos tener claro que si retomamos el recorrido sobre la superficie de la banda, ambas personas interpretan de maneras diferentes una misma situación, es decir, para el primer sujeto (observador), el recorrido que realiza el caminante sobre la superficie de la banda tiene un punto de inicio y un punto que da fin al mismo. Por otra parte, la persona que recorre dicha estructura supone que la superficie del objeto es infinita. Para aclarar esta última afirmación, debemos observar detalladamente que en la figura 69 la banda presenta el mismo diseño en su superficie, esto significa, que la banda siempre mantiene en toda su extensión el mismo color y textura, sin presentar ruptura alguna (resaltos), o demás detalles que permitan identificar al caminante que ya ha estado en algún lugar de la extensión de la superficie de la cinta, lo cual hace imposible para la persona que realiza el recorrido, identificar que en los desplazamientos que ha realizado repite trayectorias, es decir, que ya ha caminado en diversas ocasiones por los mismos puntos de la banda. Por lo tanto, si pensamos como el sujeto que recorre la banda, tenemos como consecuencia que el recorrido no tiene fin, pues se hace imposible distinguir el punto que da inicio al desplazamiento de aquel que culmina el mismo (aun cuando ambos sean los mismos).

Pues bien, como vemos la Banda de Mobius podría utilizarse como referencia para iniciar con el estudio de esta teoría, dando a entender que la misma podría vincularse a procesos educativos, por tal razón, seguiremos analizando esta situación, para hacer evidente que en ella podrían asociarse diferentes marcos inerciales.

Siendo nosotros personas ajenas a esta situación, podemos decir que para el sistema inercial que expone la banda ambos sujetos tienen la razón (desde sus marcos de referencia). Ahora pensemos en la siguiente situación: ¿Qué pasaría si estas personas debatieran acerca de quién tiene la razón?

Pues bien, para dar solución a este conflicto debemos recurrir a las propiedades descritas con anterioridad para la Cinta de Mobius. Una de ellas relaciona la existencia de una sola cara para su superficie, y la manera en que verificamos visualmente dicha propiedad, resultaría útil para que ambos observadores asimilen cuál de ellos tiene la razón.

Pensemos en que el observador muy seguro de su afirmación, le propone al caminante que resalte todo el recorrido que realiza a través de la superficie, y que él acepta. Lo primero que haría el caminante sería señalar el punto con el cual da inicio al recorrido, y a partir de este, dejar rastro de su desplazamiento. Cuando este realice la totalidad del recorrido, inmediatamente verificaría que la descripción del observador era cierta, logrando concluir que en realidad la superficie de la banda es finita, aunque cíclica. En este punto de la discusión el caminante podría dar la razón a la otra persona. Por otra parte, podría surgir una nueva discusión acerca del comportamiento de la banda, pues la persona que se encuentra fuera de ella es incapaz de observar la totalidad del rastro que deja el paso del caminante sobre dicha superficie, mientras el otro sujeto (caminante), tiene total libertad de observar el rastro que dejan sus desplazamientos sobre la estructura.

De esta nueva situación la persona que recorre la cinta podría llegar a concluir que esta posee una sola cara, pues observa claramente como la totalidad de la superficie que recubre denota el rastro de su andar, haciendo imposible percibir secciones de la misma sin recubrir, mientras al observador dada su posición, le quedaría imposible percibir que en efecto la totalidad de la superficie que recorre la otra persona está demarca con el rastro que el mismo sugirió, por tal razón, alegaría dicha afirmación, pues para él es natural que cualquier estructura diferencie dos caras (una interna y una externa).

Nuevamente esta descripción podría ser asociada a la teoría de marcos inerciales, pues vemos como una situación que se somete a diferentes patrones o condiciones, permiten a diferentes personas según sea su marco, sacar diferentes conclusiones y afirmaciones respecto de un mismo objeto.

Vemos nuevamente como el diseño de una banda de Mobius se puede asociar con el estudio de la mencionada teoría, dando a entender que de esta descripción podría sacarse muchas más situaciones en las que se recreen diferentes marcos inerciales. Ahora bien, como nuestra idea consiste en hacer evidente que esta estructura puede servir como herramienta para la enseñanza de este concepto de la relatividad, y según nuestro punto de vista lo hemos logrado, daremos por terminada esta idea e iniciaremos el estudio de otra aplicación de la banda producto de las propiedades que encierra la misma. Para ser más claros con nuestra pretensión, haremos evidente como la Cinta de Mobius producto de deformaciones continuas sobre su superficie genera el objeto geométrico llamado Botella de Klein.

Lo primero que haremos será recordar que la Banda de Mobius se genera producto de una estructura rectangular. Este objeto recibe el nombre de polígono fundamental de la Cinta de Mobius y sabemos que al realizar un giro de 180° en uno de sus extremos uniéndolo con el otro extremo, se obtiene como resultado nuestro objeto de estudio. Pues bien, a continuación, estudiaremos como el producto de deformaciones continuas sobre la superficie de la banda, generan un cuerpo geométrico semejante en estructura a la cinta (aunque diferente en diseño). Para esto observaremos la siguiente figura[10].

Figura 72. Representación en software de la Cinta de Mobius

[10] Resaltamos que las proyecciones de software utilizadas desde la figura 72 al 74, fueron extraídas del vídeo de YouTube titulado "Topología, Botella de Klein, Banda de Mobius"

Observamos con claridad la manera en que se llega a la construcción de la banda. Ahora bien, como nuestra idea consiste en hacer evidente deformaciones sobre la superficie de la misma, a continuación las mostraremos.

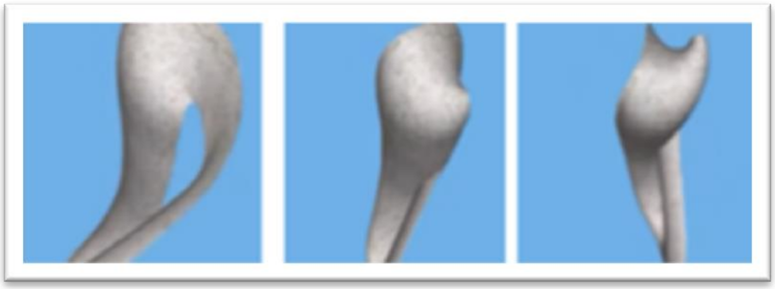

Figura 73. Deformaciones sobre la superficie de la Cinta de Mobius

Claramente se observa una secuencia de figuras en las que se deforma de manera continua la superficie de la banda. Cabe recordar que cuando nos referimos a continuidad, debemos tener claro que para efectos de nuestro estudio, bajo ninguna circunstancia se tiene permitido generar rupturas, añadiduras, enmendaduras, cortes o similares, pues estos atentan contra la noción de continuidad, por lo tanto, diríamos que si están permitidos procesos similares a la manipulación que se realiza sobre un objeto de plastilina, ya que este puede ser transformado en otro cuerpo sin alterar dicha noción. Ahora bien, retomando la idea que expone la figura, se hace claro que de momento todas las deformaciones que se realizan sobre la superficie de la banda respetan dicha noción. Así pues, el paso a seguir sería deformar nuevamente la superficie.

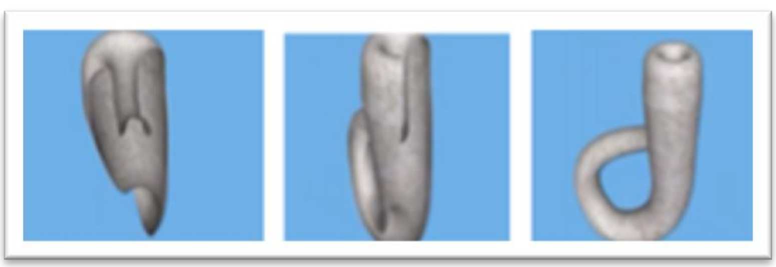

Figura 74. Deformaciones sobre la superficie de la Cinta de Mobius

En este punto de las deformaciones se hace claro que para generar la forma conocida como Botella de Klein, es necesario agujerar la superficie que conforma la Banda de Mobius, por lo tanto, podriamos decir que de momento se hace imposible generar por medio de deformaciones continuas dicho objeto. Por tal motivo, debemos acudir a una nocion de la topología que recibe el nombre de encamamiento, la cual vinculamos con la necesidad de generar una nueva dimension sobre la superficie que se deforma, logrando asociar esta con la teoria de dimensiones que desarrallomos anteriormente. Pues bien, como nuestra pretención consiste en hacer evidente que es posible generar la Botella de Klein a traves de deformaciones continuas sobre la superficie de la banda, se hace necesario utilizar conjuntamente la noción de encamamineto y la teoria de dimensiones ya expuesta. Para esto lo primero que haremos será complementar un poco más la mencionada teoría.

Dijimos anteriormente que una dimensión estaba conformada por un plano similar a una linea recta, en donde de cada vertice se desprendía una sola arista. Tambien mostramos que en la dimension dos a cada vertice se la asociaba la existencia de dos aristas, y finalmente hicimos evidente que en la dimension tres, de cada vertice se desprendían tres aristas. Pues bien, la manera en que asociaremos esta teoría con la noción de encamamiento, será a traves de la ortogonalidad de los ejes que conforman cada una de estas tres dimensiones. Para dar mayor claridad, iniciaremos observando detalladamente la estrucura que conforma los tres espacios descritos.

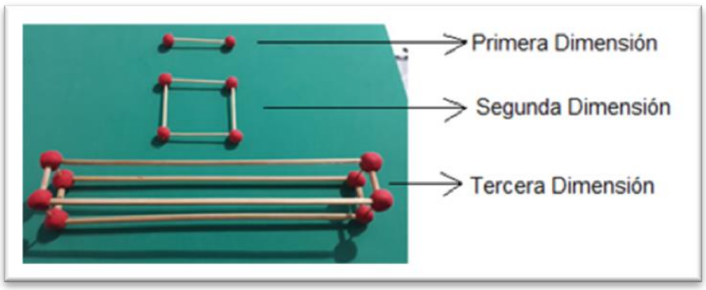

Figura 75. Estructura de las primeras tres dimensiones

Vemos claramente que cuando hicimos el diseño de la segunda dimensión, se trazó una arista que conformaba un ángulo de noventa grados con aquella que conformaba el diseño de la dimension uno. Esta situación da a entender que para formar nuevas y mayores dimensiones, bastaría con encontrar posiciones para nuevos ejes que respeten la idea de ortogonalidad mutua, es decir, que en toda direccion los ángulos trazados para las aristas que conforman la nueva dimensión sean exactamente de noventa grados. Para dar mayor claridad acerca de dicha ortogonalidad, observaremos la siguiente figura.

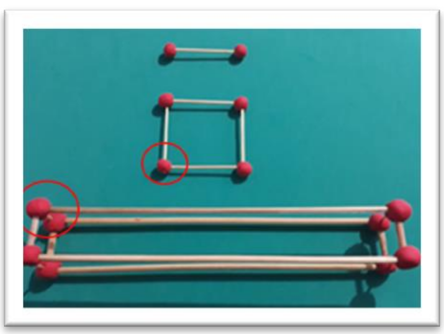

Figura 76. Ortogonalidad entres los ejes de las primeras tres dimensiones

Ahora bien, retomando la nocion topológica de encamamiento (vista como aquella que permite generar una nueva dimensión sobre la estructura de la superficie que se deforma sin que en ella se generen rupturas), se hace conveniente enlazar esta con la teoría de dimensiones. Por lo tanto, si sabemos que la cinta está inmersa en el espacio de tres dimensiones, sería consecuencia de las aclaraciones hechas con anterioridad, asegurar que el objeto que se logre generar producto de las deformaciones realizadas, escaparía de dicho espacio, tracendiendolo a un espacio mayor al tridimensional el cual curiosamente escaparía de nuestra visualización. Para comprender esta afirmación observaremos la siguiente figura.

Figura 77. Construyendo un espacio mayor al tridimensional

Vemos con total claridad que aplicando la última descripción para la teoría de dimensiones (ortogonalidad), se hace imposible generar una nueva arista sobre el eje que conforma la estructura tridimensional, es decir, es imposible generar sobre ella un ángulo que sea exactamente de noventa grados. Por lo tanto, cuando decimos que la Cinta de Mobius producto del encamamiento genera la Botella de Klein, podemos garantizar que en efecto, la banda misma genera una estructura que para nosotros es desconocida, pues vimos con claridad que nos fue imposible percibir la estructura de un espacio mayor al de tres, y en consecuencia, se hace imposible percibir cualesquier objeto que escape del espacio tridimensional. Esto último se refleja en la imposibilidad visual que tenemos para percibir la construccion de la Botella de Klein, sin que se haga necesario generar la mencionada ruptura sobre la superficie del objeto que se deforma, que en este caso corresponde a la Banda de Mobius. Así pues podemos asegurar que una nueva apliacación de la Cinta de Mobius, es generar un objeto que escapa de nuestra visualacion e incluso de nuestro espacio.

Pues bien, hasta este punto del escrito hemos logrado desarrollar a cabalidad los objetivos que planteamos inicialmente como el pilar fundamental del desenlace de este estudio, por tal razon, daremos por finalizado el estudio de este particular objeto que recibe el nombre de Cinta o Banda de Mobius.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

Luego de culminar con el estudio de la estructura denominada como Cinta o Banda de Mobius, se generaron diversas conclusiones, una de ellas sería asegurar que el uso adecuado de recursos pedagógicos tales como material didáctico y software, son una buena estrategia para estudiar los comportamientos y propiedades de la cinta de Mobius.

Por otra parte, también encontramos, que al parecer existe un patrón de recurrencia asociado a la cantidad de giros, que se hace necesario realizar sobre una estructura polinomial (tira rectangular), para generar objetos que conservan idénticas propiedades a las de una Cinta de Mobius. Además, verificamos que las deformaciones continuas que se realizan sobre una cinta de Mobius, permiten encontrar algunas invariantes topológicas asociadas a la noción de homeomorfismo.

Posteriormente, al realizar un pequeño estudio acerca de la teoría de dimensiones, logramos verificar que la Cinta de Mobius es una variedad abierta que se encuentra inmersa en el espacio de tres dimensiones, que finalmente permite, utilizar dicha estructura, como un posible recurso para la enseñanza de conceptos básicos de la relatividad, como lo es, por ejemplo, la teoría de marcos inerciales.

Bibliografía

[1] Baena, J., Mesa F. y Correa G. (2010). Topología desde la infancia. Colombia, Pereira: Editorial Correa Vélez Germán.

[2] Díaz, F. y García Calcines, J. (2005).” Curso de Topología General”. Madrid: Editorial Visión Libros.

[3] Lipschutz, S. (1970). Serie de compendios Schaum “*Teoría y problemas de Topología General”*. México: Editorial Mc Graw-Hill.

[4] Margalef Roig, J. y Outerelo Domínguez, E. (1993). “*Introducción a la topología”*. Madrid, España: Editorial Complutense, S.A.

[5] Munkres, J. (2002). “*Topología”*. (2da. Ed.). Madrid, España: Editorial Pearson Educación.

[6] Sakalli, I. (Productor) y Weixelbaum, K. (Productor). (2010). “*The Adventures of the Klein Bottle”* [Película]. Berlin: Studio of the Department of Mathematics and Computer Science.

[7] Stoll, C. (Director) Haran, B. (Productor). “*Cutting a Klein Bottle in Half”*. [Película]. California: Studio Mathematical Sciences Research Institute.

[8] Zine Boudhraa. (Productor). “*Non - Orientable Surface*”. [Película]. Studio: Taken from Visual Calculus by Zine Boudhraa.

[9] Stoll, C. (Director), Haran, B. (Productor). Klein Bottles. [Película]. California: Studio Mathematical Sciences Research Institute.